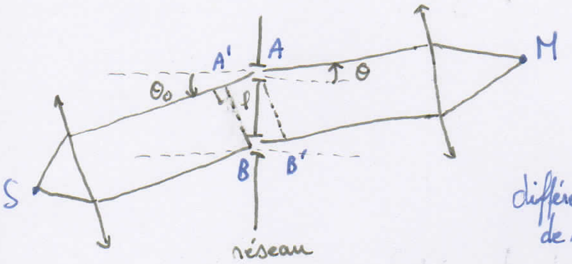
Leçon 3 : Spectrométrie optique, couleur.

Post bac : Réseau

1) Formule du réseau. (1001 questions PC-PC*)

Réseau de pas l et a = taille des trous.
N fentes //



B est en avance sur A à l'arrivé sur le réseau : $A'A = l\sin\theta_0$

B est en retard sur A à la sortie du réseau : $BB' = l\sin\theta$

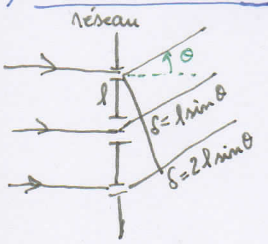
différence de marche $= \delta = BB' - A'A = l(\sin\theta - \sin\theta_0)$ (>0 si B en retard sur A)

On obtient des maxima d'interférence pour lesquelles diffracté par les fentes successives sont en phase : $\delta = p\lambda$ (p entier)

(Moyen mnémotechnique : La différence de marche est à λ ce que la différence de phase est à 2π : $\boxed{\dfrac{\delta}{\lambda} = \dfrac{\varphi}{2\pi} = p}$ ($p \in \mathbb{N}$))

Formule du réseau : $\boxed{p\lambda = l(\sin\theta - \sin\theta_0)}$ avec p entier.

2) Distribut° de l'intensité dans le cas d'un réseau éclairé en incidence normale (Taillet p 103)



Formule du réseau : $\sin\theta = p\dfrac{\lambda}{l}$ et $\delta = l\sin\theta$

Soit le 1er rayon (OPPM) d'amplitude $\underline{a_0} = A_0 e^{i\omega t}$

——— 2ème ——————————— $\underline{a_1} = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = \underline{a_0} e^{i\varphi}$

avec φ : la différence de phase $= \dfrac{2\pi}{\lambda}\delta = k\delta$ (vecteur d'onde) (condition d'interférence constructive) ($\varphi = k\delta$)

$\underline{a_p} = a_0 e^{ip\varphi}$ avec p entier : $\quad$ a $\quad \underline{a_{TOT}} = \underline{a_0} + \underline{a_1} + \dots + \underline{a_N} = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \underline{a_0} e^{ip\varphi} = \sum_{p=0}^{N} (\underline{a_0} e^{i\varphi})^p$

Mnémotechnique d'une série géométrique

$S = 1 + x + x^2 + \dots x^{N-1}$

$xS = x + x^2 + x^3 + \dots x^N$

$S(1-x) = 1 - x^N$

$\Rightarrow S = \dfrac{1-x^N}{1-x}$

On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique.

$$\boxed{\underline{a_{TOT}} = \frac{1 - \underline{a_0} e^{i\varphi N}}{1 - \underline{a_0} e^{i\varphi}}}$$

correction il n'y a pas le p dans les équations.

Or nous c'est l'intensité que l'on veut.

$\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} l\sin\theta$

$$I = \underline{a_{TOT}}\,\underline{a_{TOT}}^* = A_0^2 \left(\frac{1 - \underline{a_0} e^{ip\varphi N}}{1 - \underline{a_0} e^{ip\varphi}}\right)\left(\frac{1 - \underline{a_0} e^{-ip\varphi N}}{1 - \underline{a_0} e^{-ip\varphi}}\right)$$

$$I = A_0^2 \left(\frac{1 - a_0 e^{-ip\varphi N} - a_0 e^{ip\varphi N} + e^0}{(1 - a_0 e^{ip\varphi})(1 - a_0 e^{-ip\varphi})}\right) = A_0^2 \left(\frac{2 - a_0 e^{-i\varphi N} - a_0 e^{i\varphi N p}}{2 - (a_0 e^{ip\varphi} + a_0 e^{-ip\varphi})}\right) = A_0^2 \left(\frac{2 - 2\cos p\varphi N}{2 - 2\cos p\varphi}\right) = A_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{p\varphi N}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{p\varphi}{2}\right)}$$

Math : $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

$1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

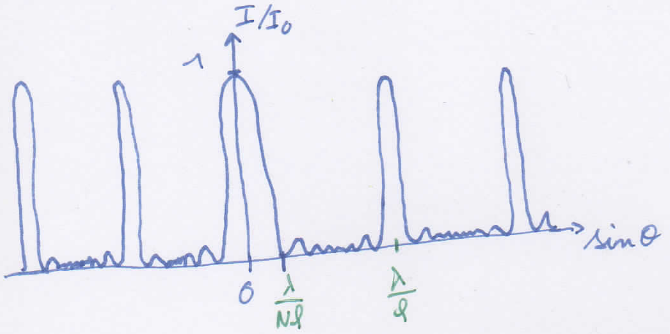
$$\boxed{I = A_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi l\sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi l\sin\theta}{\lambda}\right)}}$$

② Spectrométrie optique et couleur.

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(N\pi l \sin\theta/\lambda)}{\sin^2(\pi l \sin\theta/\lambda)}$$

on obtient $\left\{ \begin{array}{l} \text{Un maximum de } I \text{ pour (dénominateur nul)} \quad \dfrac{\pi l \sin\theta}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{n\lambda}{l} \\ \text{Un mini de } I \text{ pour (numérateur nul)} \quad \dfrac{N\pi l \sin\theta}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \sin\theta = n\dfrac{\lambda}{Nl} \end{array} \right.$

D'où la figure.

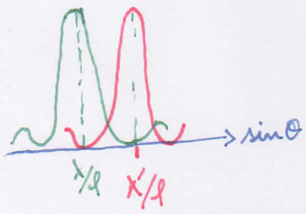


→ En réalité cette courbe ressemble à celle qui est sur les 1000 et 1 question (chap 5. q 28) à cause de la figure de diffract° de chaque fente.

→ Discussion physique : La position des max et des min dépend de λ (donc le rouge est plus décalé que le bleu.)

3) Critère de Rayleigh : Condition de limite de résolution : Soit $\Delta\lambda$ la plus petite valeur positive de $\lambda' - \lambda$ pour laquelles les pics sont séparés

↳ "c'est lorsque le centre de l'un ne coïncide pas avec le bord de l'autre".



$\Delta(\sin\theta) = \dfrac{\lambda}{Nl}$ or d'après la formule $\sin\theta = p\dfrac{\lambda}{l}$

$\Rightarrow$ à la limite $\dfrac{\lambda}{Nl} = p\dfrac{\Delta\lambda}{l} \Rightarrow \boxed{\Delta\lambda = \dfrac{\lambda}{pN}}$

Si on veut un $\Delta\lambda$ petit pour avoir une bonne résolution il faut $N\nearrow$ ou $p\nearrow$ ordre d'interférence.

Nombre de trait éclairé

En réalité, d'autres causes, de type instrumental, limite le pouvoir séparateur : citons la largeur de la fente d'entrée du spectro du à la diffract° (en TP c'est elle qui fixe le pouvoir de résolution).