

8-M- Oscillateurs

Bibliographie :

- Travaux pratique d'électronique : Vauchelles p 60 - 62.
- Bellier 3ème édition p 77
- Quaranta mécanique (formule de Borda p 190)

HP électronique II 1er année (p256) et Duffait électronique (p 189).



Intro :

Oscillateur pour la mesure du temps.

I – Oscillation libre (mécanique) : Pendule non harmonique (formule de Borda)

Montage : potentiostat + pendule simple le tout relié à latis Pro

On trace $T(\theta_0) = f(\theta_0^2)$ et on doit obtenir une droite : on vérifie le modèle de la formule de Borda :

$$T(\theta_0) = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

II – Oscillation forcée (électrique) : phénomène de résonance

Montage : avec Wobulation

Il faut insister sur le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R_{tot}} \sqrt{\frac{L}{C}}$ plus il diminue plus le pic devient large

Fréquence de résonance aux bornes du condensateur : $f_c^2 = f_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$ donc si on trace $f_c^2 = f_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$ on doit avoir une droite

III- Oscillateur auto entretenu : Multivibrateur astable (HP électronique II 1er année (p256) et Duffait électronique (p 189)).

- Montage de base : (suivre le Duffait)
- Contrôle de la fréquence: (HP ou Duffait)

On montre qu'il faut jouer sur la cte d'intégration pour modifier la fréquence. Si on joue sur C c'est trop cher, donc on joue sur R. Tracer $fz = f \left(\frac{1}{R}\right)$, on montre que c'est linéaire.

IV – Oscillateur couplé (en électronique)

Montage : 1 LC série avec GBF l'autre à une certaine distance juste un LC série (L et C identique dans les deux circuits)

Avec wobulation sur l'oscilloscope on montre qu'on a une 2ème résonance (au niveau du 1^{er} RLC (R car résistance interne L et GBF)

Conclusion :

Q grand peut poser des problèmes dans le cas d'oscillation forcée en mécanique : Destruction de bâtiments (résonance en amplitude)

Autre types d'oscillateur :

Oscillateur paramétrique : est un oscillateur dont l'un des paramètres varie au cours du temps (exemple pendule pesant avec la masse qui change de position)

Oscillateur optique avec cavité résonante

I – Oscillateur mécanique : Pendule non harmonique (formule de Borda)

Rappel : Pendule simple :

On considérant de faible oscillation $\sin \theta \approx \theta$, on linéarise l'équation différentielle.

1/ pour de petites oscillations, on peut confondre $\sin(\theta)$ avec θ . On obtient alors l'équation :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ avec, rappelons-le, } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

dont une solution est :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) ; \text{ de période } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Remarque : la période ne dépend pas de la position (l'angle), ce qui montre aussi la linéarité. On a donc un oscillateur harmonique : 1 seule fréquence propre qui permet de mesurer le temps.

Mais en réalité elle n'est pas linéaire : Pour un pendule simple il faut utiliser la formule de Borda

Dans le cas des grandes oscillations on ne peut plus considérer l'isochronisme des petites oscillations et la formule : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ n'a pas une solution simple, il faut faire un développement limité du sinus à l'ordre 2.

Remarque : Pour la démo il faut utiliser les énergies, séparer les variables et intégrer (de 0 à T/2)
Attention avec un pendule pesant c'est plus compliqué puisqu'il faut parler de l'inertie.

- La formule approchée de Borda : $T(\theta_0) = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$

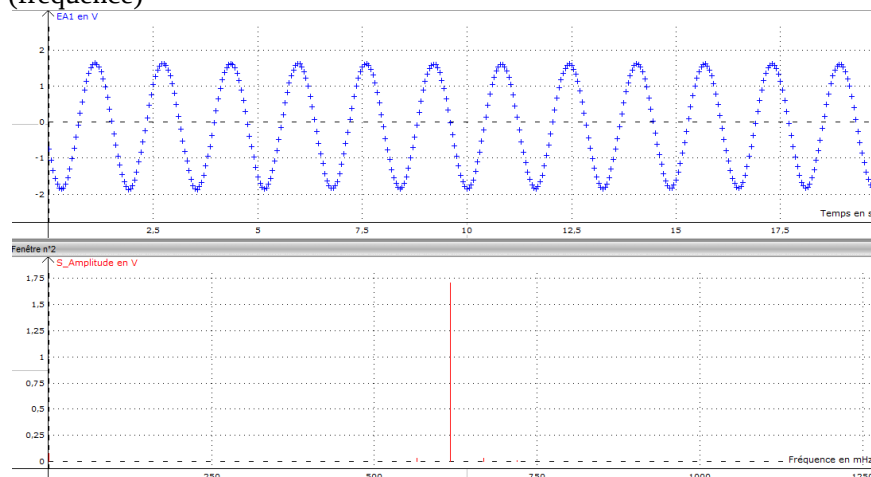
Remarque : la période dépend de la position initiale ce qui montre la non linéarité.

Vérification du modèle que l'on va essayer de modéliser en retrouvant la valeur de T_0 avec $f = \frac{f_0}{\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)}$

On trace $T(\theta_0) = f(\theta_0^2)$ et on doit obtenir une droite

Le coefficient directeur est $T_0/16$ et l'ordonnée à l'origine est $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ et on vérifie avec les données expérimentales.

Expérimentalement on utilise un pendule pesant avec potentiostat directement relié à latisPro et on fait la TF (fréquence)

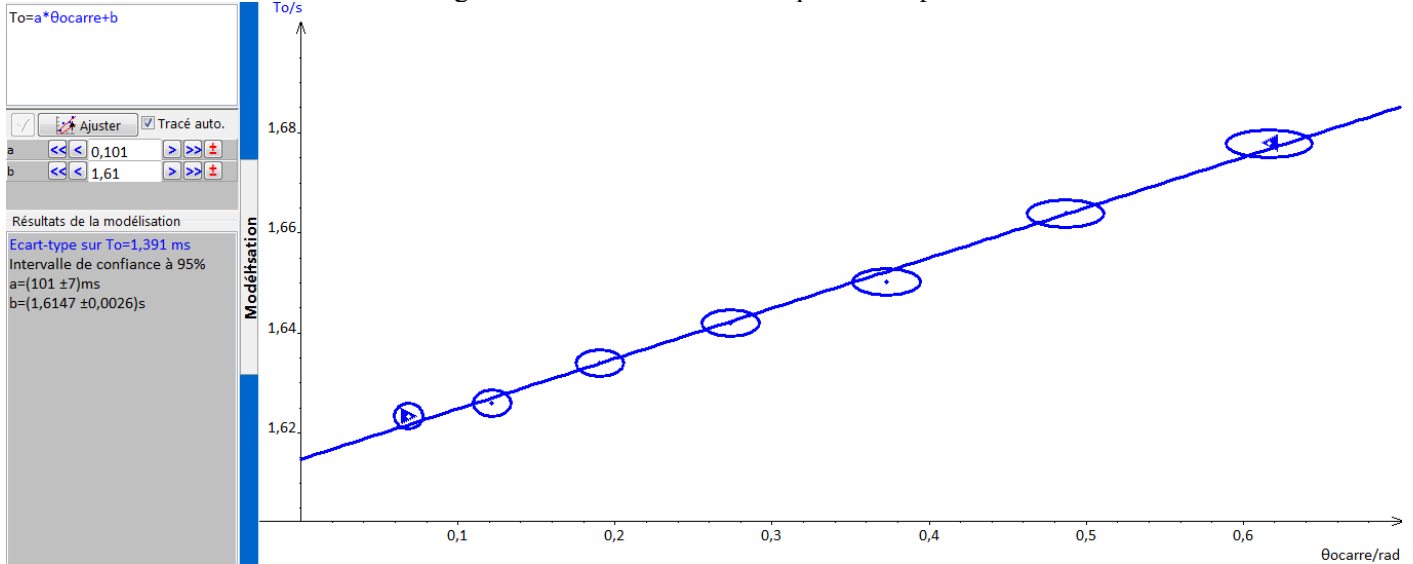


On obtient avec les valeurs expérimentales :

Pente = 0.101 et l'ordonnée à l'origine = 1.61 s

On remarque que la pente est bien égale à $1.61/16 = 0.101$.

O nous avons oublié de mesurer la longueur du fil on ne peut donc pas vérifier T_0



On voit que le modèle est vérifié

II – Oscillation forcée (électrique) : phénomène de résonance / circuit RLC série :

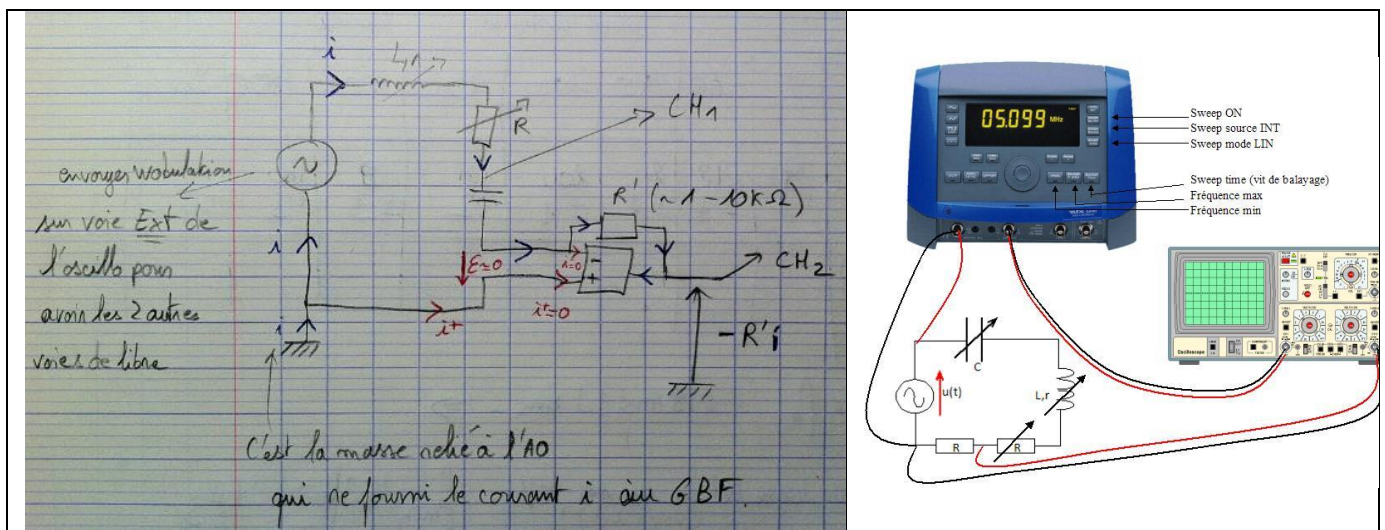
Oscillations électriques : variation d'au moins une grandeur électrique au cours du temps

- libres : dues à des conversions successives d'énergie
- forcées : dont la fréquence est imposée (et la même) que celle de l'excitateur dans notre cas un GBF car on travaille à fréquence variable).

Dans ce montage, nous étudierons la réponse d'un circuit RLC à une excitation sinusoïdale permanente dans un régime forcé.

Tracé automatique de la courbe de résonance : Utilisation de la Wobulation

Réalisation du circuit : voir vidéo pour les réglages

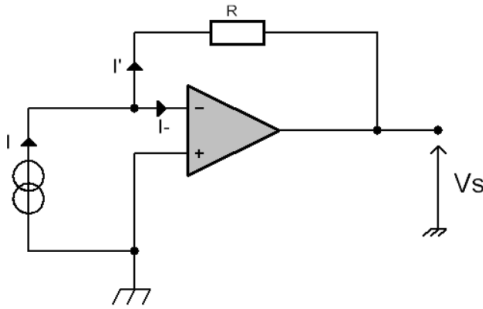


Rôle de l'AO : Visualiser l'intensité circulant dans le circuit, on ne peut pas le faire aux bornes de la résistance car cette dernière va changer de valeur.

2 solutions s'offre à nous :

- On rajoute une résistance R_1 au circuit que l'on garde fixe et on visualise la tension à ces bornes mais le problème de cette méthode c'est qu'on ne peut plus visualiser la tension aux bornes du condensateur car on va avoir un problème de masse, CH1 et CH2 n'auront plus la même masse et on ne pourra pas visualiser la tension et le courant en même temps.

- On utilise un AO en convertisseur courant / tension et de cette manière CH1 et CH2 sont à la même masse. En effet CH1 est relié à $V_+ = V_- = \text{relié à la masse}$ et donc la résistance R' n'est pas considéré comme faisant parti du circuit.



Démo avec notation de notre circuit :

AO idéal : $\varepsilon = 0$ et $i_+ = i_- = 0$ donc le courant traversant R' est i traversant le circuit.

D'où $V_s = -R'i$ en effet avec la convention d'un AO normal V_s est exprimé en fonction du courant sortant de l'AO or ici $i_s = -i$

La tension aux bornes de R' se note : $U = V_+ - V_s = R'i$

Donc $V_s = -R'i$

Ce qu'on va mesurer en CH2 : $V_s = -R'i$

$i = i_s$ le courant de sortie de l'AO < 30 mA suivant les AO pour éviter la saturation

Il faut donc diminuer l'amplitude du GBF pour éviter la saturation de l'AO

Remarque : Si i n'est pas visible à l'écran de l'oscillo il suffit d'augmenter R' puisque cette dernière ne fait pas partie du circuit.

Rôle de la fonction Wobulation :

La fonction wobulation permet de faire varier la fréquence du signal délivrée par le GBF en fonction du temps.

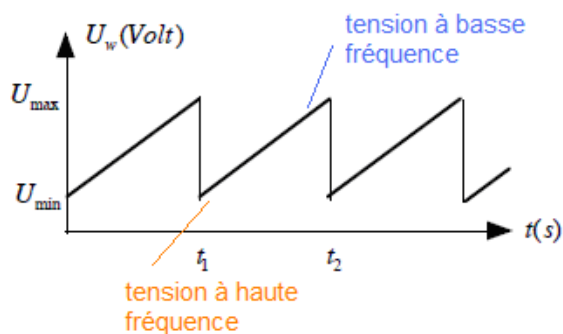
En mode wobulation, la fréquence est imposée par une tension U_w appelée tension de wobulation : elle vaut $f = a U_w + b$ où a et b sont deux constantes dépendant du générateur. On obtient la wobulation en choisissant, par exemple, une rampe pour la fonction U_w . Il y a deux façons de réaliser ceci : soit en utilisant la wobulation interne du générateur : la fonction U_w est alors produite par le générateur lui-même, soit en utilisant une autre source de tension pour générer U_w .

Le GBF Metrix permet une wobulation interne.

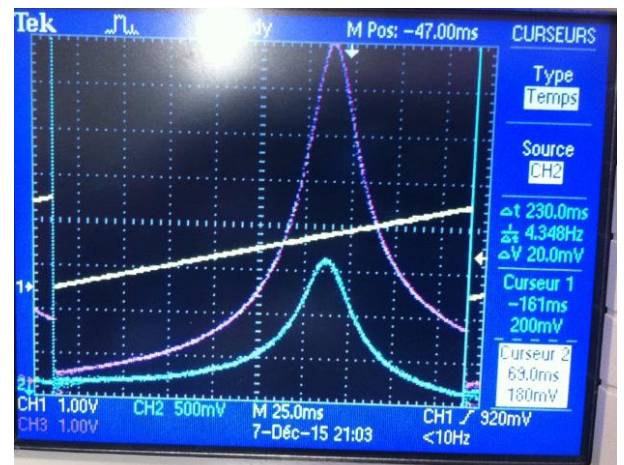
Réglages du GBF :

- On choisit une fréquence basse (500 Hz)
- On relie la sortie du GBF « Sweep Out » à la voie 3 (ou Ext) de l'oscilloscope
- On se place en Sweep On
- On choisit un Sweep max : 5 kHz – 10 kHz de façon à voir quelque chose
- On se place en Sweep mod : Linéaire et Sweep source : Int.
- Sweep time petit : 150 ms

On trigge sur la voie 3 (ou Ext de l'oscillo) afin d'avoir les 2 autres voie libre pour l'intensité et la tension



On déplace le signal pour qu'il occupe tout l'écran de l'oscillo, on l'étale et on ne garde que la partie supérieure. Et on bloque la BP avec les curseurs pour voir l'évolution selon les paramètres.



Remarque : Sur la photo : on a trigger sur CH1 et on visualise la tension aux borne du condensateur en voie CH2 et l'intensité en CH1

- Influence des différents paramètres :

✓ $\uparrow R$: $I_{\max} \downarrow$

Même BP

Même ω_0

$\rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f} \downarrow$: le pic devient plus large.

✓ $\uparrow C$: Même $I_{\max}$

Même BP

$\omega_0 \downarrow$

$\rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f} \downarrow$: Le pic devient plus large.

✓ $\uparrow L$: $I_{\max}$ cst ($\downarrow$ légèrement à cause la résistance interne de la bobine)

BP $\downarrow$

$\omega_0 \downarrow$

$\rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f}$: On ne peut pas conclure

Tous ces résultats sont en accord avec les formules théoriques : $I_{\max} = \frac{E_m}{R}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R_{\text{tot}}} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Rendre la manip quantitative :

On remarque que lorsque l'on a fait varier R la fréquence de résonance en intensité n'a pas changée alors que celle en tension a diminuée.

On va donc mesurer ces fréquences de résonance et regarder si elles correspondent bien au modèle théorique.

Pour cela on va utiliser la courbe d'étalonnage.

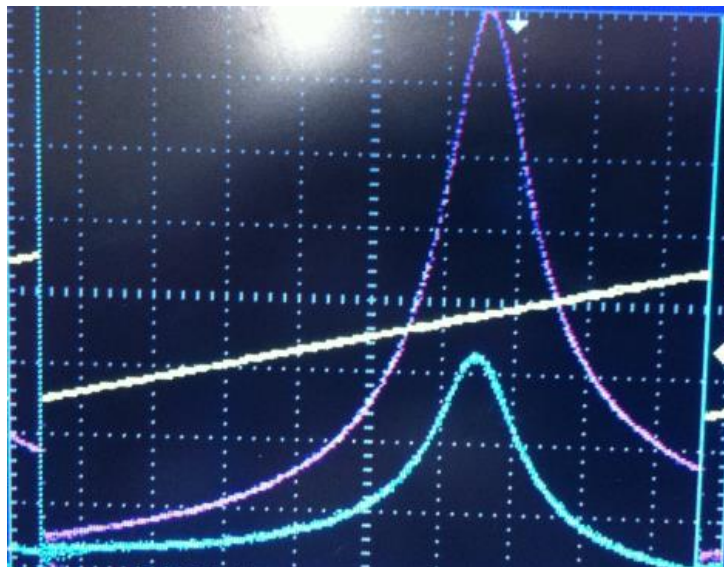
Valeur des différents composants :

Indiqué sur les boitiers : $\begin{cases} L = 30 \text{ mH} \\ C = 4 \text{ nF} \end{cases}$

mesuré avec le ??? je connais pas le nom : $\begin{cases} L = 27 \text{ mH} & R_L = 296 \Omega \\ C = 4,1 \text{ nF} \end{cases}$

Curseur 1 = $69 \pm 1 \text{ ms}$

Pour $f = 4 \text{ kHz}$



Curseur 2 = $299 \pm 1 \text{ ms}$

Pour $f = 20 \text{ kHz}$

On a donc 2 points pour une droite d'équation : $f = at + b$ ce qui va nous permettre de trouver a et b

$$\begin{cases} 4 \text{ kHz} = a \times 69 \text{ ms} + b \\ 20 \text{ kHz} = a \times 299 \text{ ms} + b \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0.069565 \text{ kHz} \cdot \text{ms}^{-1} \\ b = -0.8 \text{ kHz} \end{cases}$$

Pour le calcul des incertitudes on va négliger l'incertitude de la fréquence fournie par le GBF car celle-ci est négligeable devant l'incertitude de lecture $\Delta t = 1 \text{ ms}$ le plus souvent.

On cherche donc à savoir quel est l'incertitude sur la fréquence Δf si $\Delta t = 1 \text{ ms}$

Pour cela on a la relation $f = at + b$ (on considère que les incertitudes sur a et b sont négligeables devant celle sur t).

On utilise la formule de la propagation des incertitudes : $uf = f \sqrt{\left(\frac{ut}{t}\right)^2} = f \left(\frac{ut}{t}\right)$

Du coup il vaut mieux utiliser un tableur : (voir tableur dans le dossier)

Attention : Dans les valeurs de R on a pas pris en compte la résistance de sortie du GBF (50Ω) ainsi que celle de la bobine $R_L = 296 \Omega$

a (kHz.ms-1)	0,069565	R (Ohm)	5	500	750	1000	1200	1500	1800	2000	Pour f0
b (kHz)	-0,8	t (ms)	217	212	208	204	199	189	180	171	218
		ut (ms)	1	1	1	1	2	3	3	4	1
		f (Hz)	14,295605	13,94778	13,66952	13,39126	13,043435	12,347785	11,7217	11,095615	14,36517
		uf (Hz)	0,065878364	0,065791415	0,065718846	0,065643431	0,131089799	0,195996587	0,195361667	0,25954655	0,065895275

1. Résonance en tension

Lorsque l'on fait varier R on remarque que la résonance en tension aux bornes du condensateur diminue :
D'après la théorie :

Démonstration :

$$\text{On a } \omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$\text{or } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\text{d'où } f_c = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

avec

f_c : fréquence de résonance
aux bornes du condensateur

e) Résonance en tension aux bornes du condensateur :
surtension

La tension aux bornes du condensateur est donnée par :

$$U_C = Z_C \cdot I = \frac{Z_C \cdot E}{Z}$$

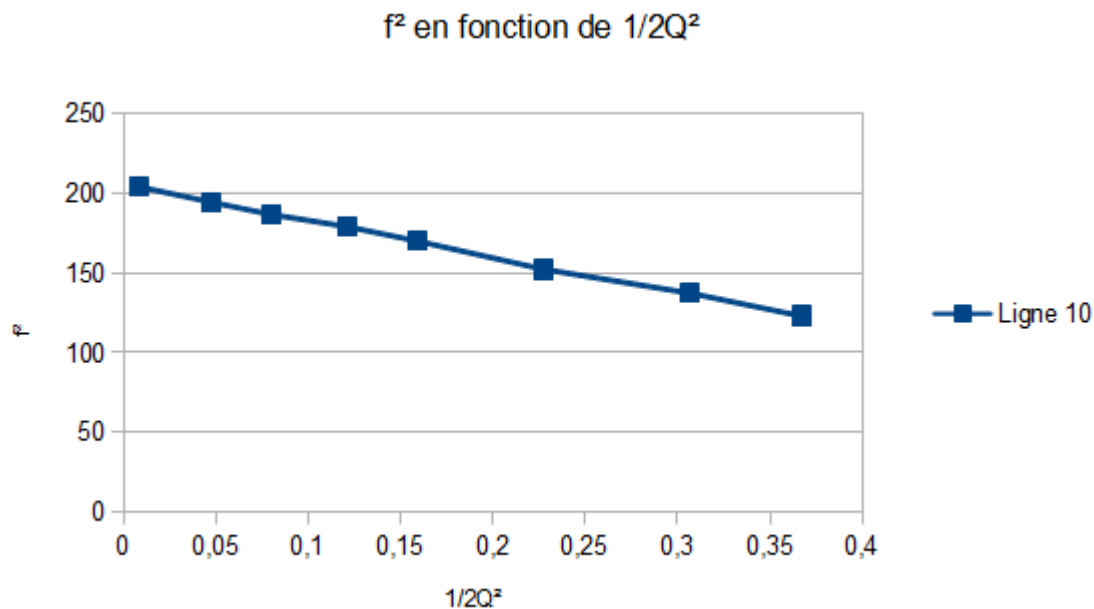
Avec $Z = |Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ et $Z_C = 1/C\omega$, il vient :

$$U_C = E \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

Cherchons la valeur de ω_c pour laquelle la tension aux bornes du condensateur passe par son maximum. Pour cela il suffit de résoudre $\frac{d[(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2]}{d\omega} = 0$. Il vient $1 - LC\omega^2 = \frac{R^2C}{2L}$ donc $\omega^2 = \frac{1}{LC} \left[1 - \frac{R^2C}{2L}\right]$. Or $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et en remarquant que $Q^2 = \frac{L}{R^2C}$, il vient $\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. On constate que la résonance en tension aux bornes du condensateur a lieu pour une fréquence inférieure à la fréquence de résonance d'intensité et uniquement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (la racine ne peut pas être négative). Un calcul simple montre que la tension efficace maximale est :

$$U_C(\omega_c) = \frac{QE}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{et que } U_C(\omega_0) = QE.$$

$f_c^2 = f_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$ donc si on trace $f_c^2 = \text{fonction}\left(\frac{1}{2Q^2}\right)$ on doit avoir une droite



Questions :

- Quel est l'avantage de la résonance en électricité ? **C'est de pouvoir faire des filtres passe bandes**

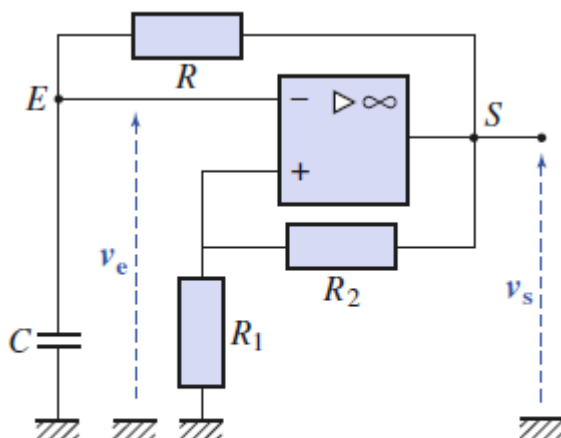
III- Oscillateur auto entretenu : Multivibrateur astable

Biographie utilisée : HP électronique II 1er année (p256) et Duffait électronique (p 189).

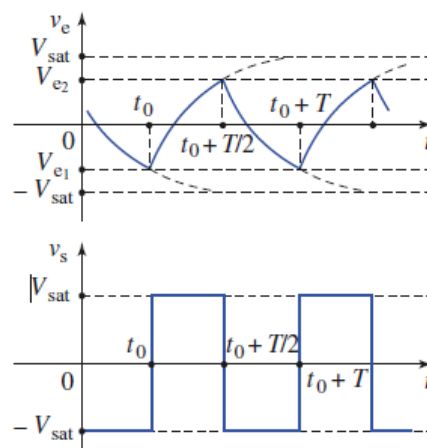
- Montage de base : (suivre le Duffait)
- Contrôle de la fréquence: (HP ou Duffait)

On montre qu'il faut jouer sur la cte d'intégration pour modifier la fréquence. Si on joue sur C c'est trop cher, donc on joue sur R.

Tracer $fz = f\left(\frac{1}{R}\right)$, on montre que c'est linéaire. On peut facilement contrôler la fréquence. (On peut utiliser un multiplieur mais on doit utiliser des diodes zener pour éviter la saturation. On complique le montage ...).



Doc. 15. Multivibrateur astable à A.O.

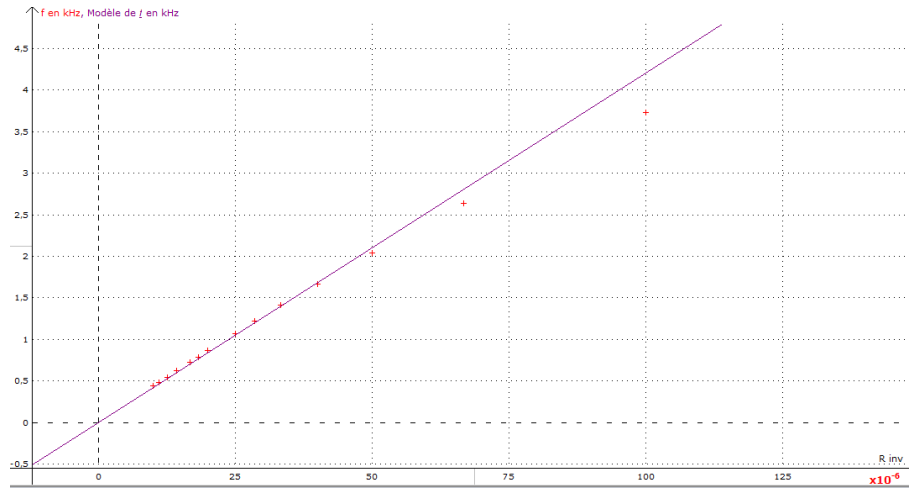


Doc. 16. Chronogramme d'un multivibrateur astable.

Avec ce montage recours qu'à un intégrateur approché, en utilisant un RC série, donnant une suite d'exponentielles croissante et décroissante (au lieu du triangle). La fréquence d'oscillation est plus compliquée à calculer (voir fichier PDF). Le montage est expérimentalement moins complexe et moins encombrant.

Question : Pourquoi à faible valeur de R (haute valeur de fz), la fonction $fz = f\left(\frac{1}{R}\right)$, n'est plus linéaire ??

Tracer $fz = f\left(\frac{1}{R}\right)$



Remarque : Pour contrôler la fréquence il vaut mieux utiliser le montage avec un multiplieur car c'est la tension d'entrée du multiplieur qui change la fréquence, ce qui ne modifie en rien l'intensité à la sortie de l'AO, alors qu'avec la résistance comme on a fait nous, on modifie l'intensité

La génération de signaux périodiques carrés et triangulaires se fait par le bouclage d'un intégrateur sur un comparateur à hystérésis. Ces « oscillateurs de relaxation » sont utilisés pour les beepers sonores, les LED clignotantes sur les appareils électriques courants, ou pour les clignotants de voiture.

Il existe des équivalents mécaniques de ces oscillateurs électriques (expérience du vase de Tantale). Ces oscillateurs mécaniques et électriques ont en commun le « relâchement » périodique d'un stock d'énergie, d'où leur nom d'oscillateurs de relaxation.

Le principe d'un oscillateur spontané (ici auto entretenu) est de se mettre à osciller sans excitation extérieure. Il s'agit de tirer parti de l'instabilité d'un système linéaire bouclé pour faire naître les oscillations, et de la non-linéarité d'un bloc pour éviter leur divergence.

IV – Oscillateur couplé (en électronique) (qualitatif)

Remarque : il est possible de le faire en mécanique avec des pendules couplés

Le couplage entre les deux oscillateurs s'effectue via l'inductance mutuelle M entre les deux circuits. Pour une réalisation pratique du montage, il est recommandé de prendre 2 bobines d'inductances presque égales ($L \simeq 50 \text{ mH}$) et les 2 condensateurs de capacités égales ($C \simeq 100 \text{ nF}$). On modifie la valeur de M (inductance mutuelle) en jouant sur la distance entre les deux

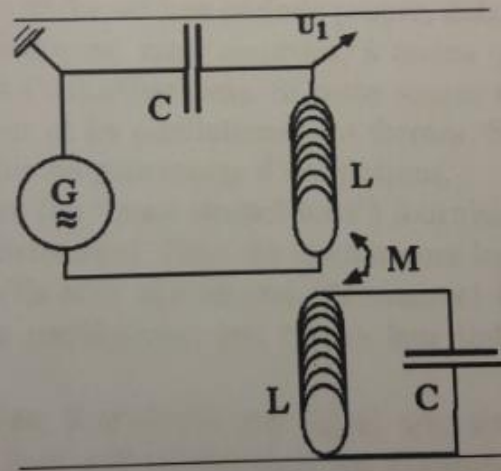


FIG. 5 – Oscillateur Couplés par inductance mutuelle

bobines ; celles-ci sont disposées de façon à avoir le même axe.

En négligeant toutes les pertes par effet Joule, montrer que la tension aux bornes du condensateur s'écrit :

$$U_1 = - \frac{(1 - LC\omega^2)E \cos(\omega t)}{(1 - LC\omega^2)^2 - (MC\omega^2)^2} \quad (12)$$

où E est l'amplitude de la tension sinusoïdale de pulsation ω délivrée par le générateur. En déduire que les 2 pulsations de résonnances sont données par

$$\omega_+ = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{M}{L}}} \text{ et } \omega_- = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{M}{L}}} \quad (13)$$

avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

À l'aide d'un balayage en fréquence sur le générateur observer la courbe de résonance du système, observer l'effet de M sur la forme de la courbe de résonance.

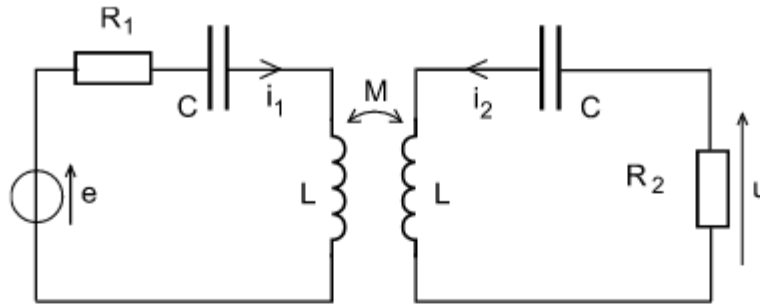


FIG. 1 – Deux circuits RLC couplés par mutuelle induction

1. Établir le système d'équations différentielles reliant $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $e(t)$.

2. Montrer que ces relations peuvent se mettre sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2 i_1 / dt^2 \\ d^2 i_2 / dt^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_1 / dt \\ di_2 / dt \end{pmatrix} + 1/C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} de/dt \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

3. Les trois matrices caractérisent respectivement le terme inductif, le terme dissipatif et le terme capacitif.

(a) À quelle condition sur ces trois matrices peut-on définir des variables qui permettent de découpler les équations (4) ?

(b) Cela est-il toujours possible ?

4. On suppose, dans cette question uniquement, que $R_1 = R_2 = R$.

(a) En examinant la symétrie des équations différentielles couplées liant $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $e(t)$, montrer qu'il existe, dans ce cas particulier où les résistances sont égales, deux combinaisons linéaires simples de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ qui permettent d'obtenir des équations différentielles découplées.

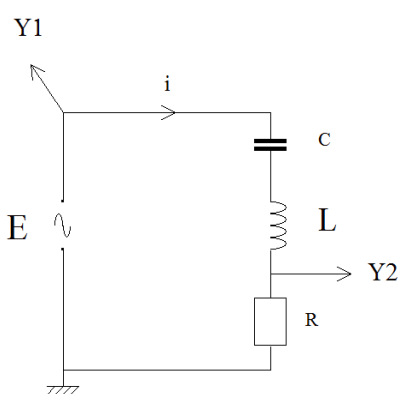
(b) Expliquer en quoi ces combinaisons définissent des *modes propres* du système couplé.

Annexe : RLC classique

Oscillations électriques : variation d'au moins une grandeur électrique au cours du temps

→ libres : dues à des conversions successives d'énergie

→ forcées : dont la fréquence est imposée (et la même) que celle de l'excitateur dans notre cas un GBF car on travaille à fréquence variable).



Dans ce montage, nous étudierons la réponse d'un circuit RLC à une excitation sinusoïdale permanente dans un régime forcé.

Duffait p 62 : $L=0,1 \text{ H}$ ($101 \pm 2 \text{ mH}$)

$C=0,1 \mu\text{F}$ ($99,8 \pm 0,7 \text{ nF}$)

$R=100 \Omega$ ($99,9 \pm 0,8 \Omega$)

($R_L=7,8 \Omega$ et $R_G \approx 50 \Omega$ et $R_{\text{tot}}=158 \pm 1 \Omega$)

I / Etude de la résonance en intensité

Le GBF délivre une tension sinusoïdale. La réponse en intensité est sinusoïdale.

$$\underline{e} = E_m e^{j\omega t} \text{ d'où } e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

$$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ d'où } i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

→ On observe la tension aux bornes de R (qui nous donne l'intensité au travers de la loi d'Ohm) et la tension aux bornes de l'ensemble du circuit (ce qui correspond aux bornes du GBF). On obtient donc 2 signaux sinusoïdaux qui, en dehors de la fréquence de résonance, sont déphasés.

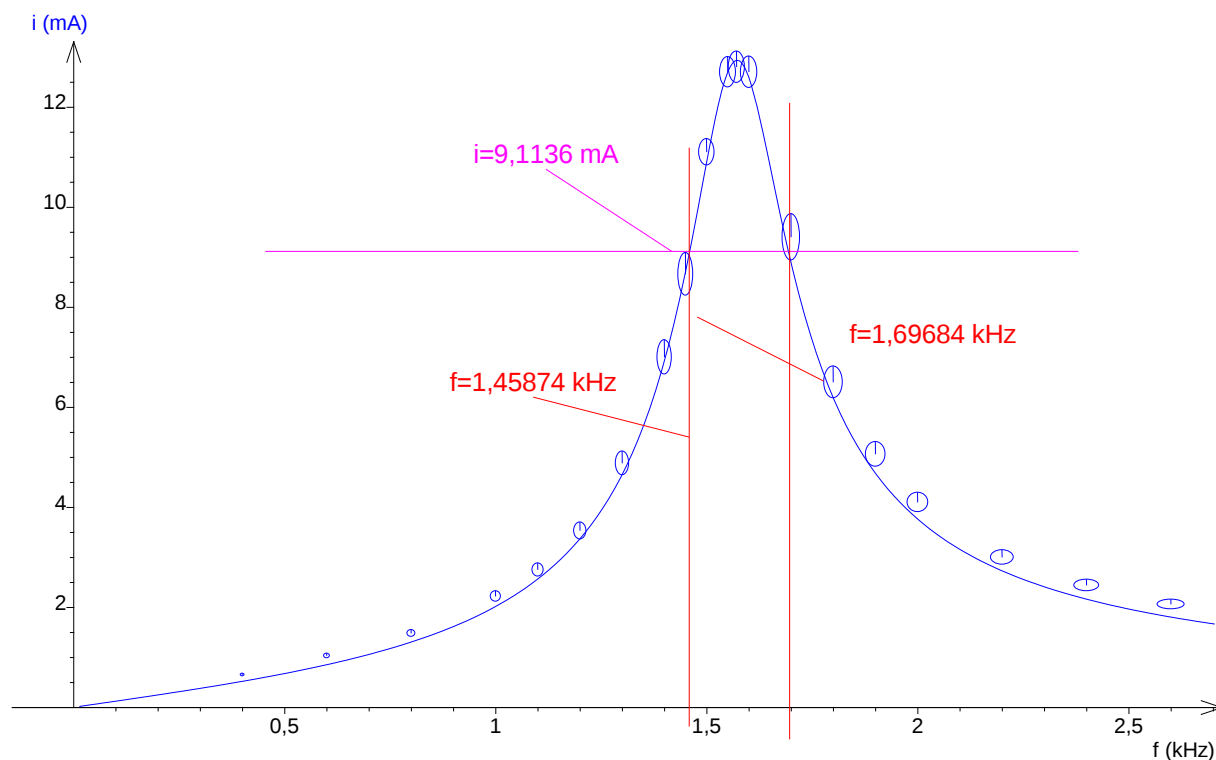
1) Relevé manuel de mesures.

On fixe E et on relève U_R et ϕ en fonction de la fréquence f.

Les incertitudes relatives sont déterminées pour chaque différent calibre à l'aide des curseurs. De même pour la

phase via la formule $\varphi = 2\pi \frac{d}{D}$.

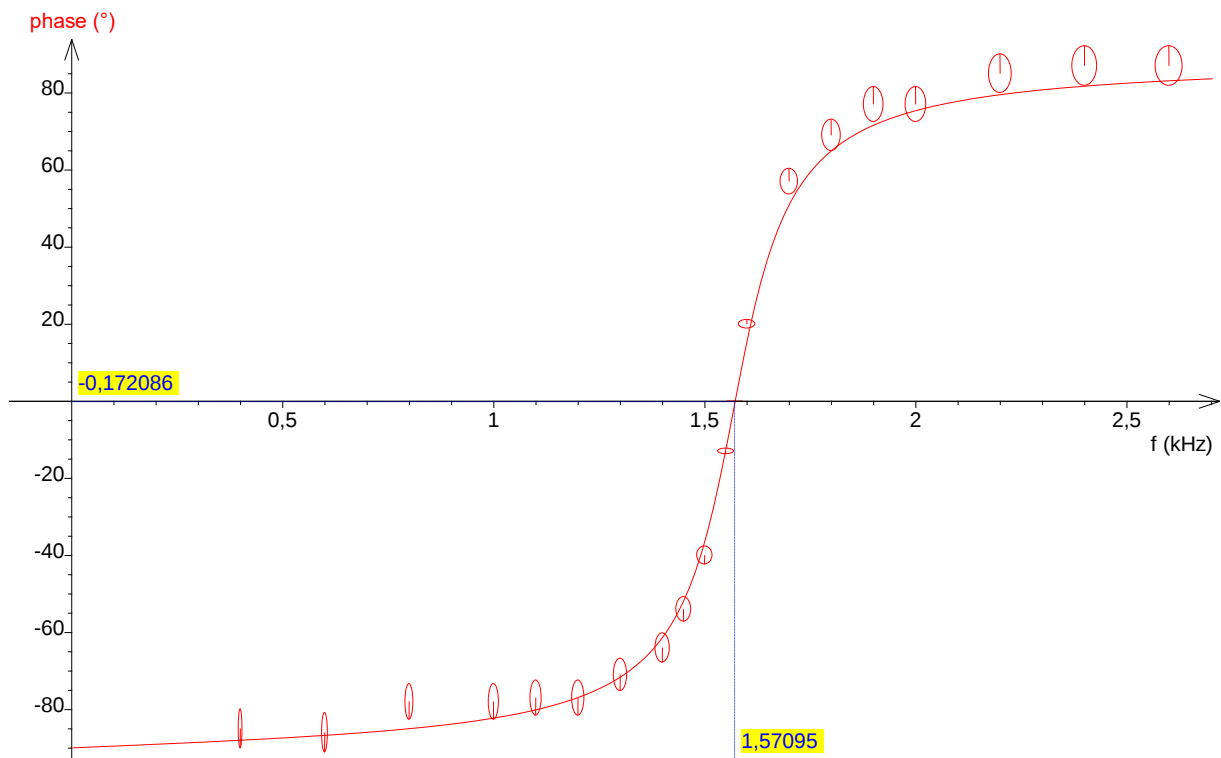
On trace $I=f(f)$ et $\phi=f(f)$.



$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R_{tot}^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{E_m}{\sqrt{R_{tot}^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}}$$

$$i = \frac{2}{\sqrt{a^2 + \left(bf - \frac{c}{f}\right)^2}}$$

On modélise par



$$\varphi = \arctan\left(\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\frac{1}{R_{tot}}\right) = \arctan\left(\left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi Cf}\right)\frac{1}{R_{tot}}\right). \text{ On modélise par : } \varphi = a \tan\left(\left(b * f - \frac{c}{f}\right)\frac{1}{R_{tot}}\right)$$

→ Tests qualitatifs : courbes modèles englobent points expérimentaux aux incertitudes près.

→ Tests quantitatifs : comparaison expérience/modèle.

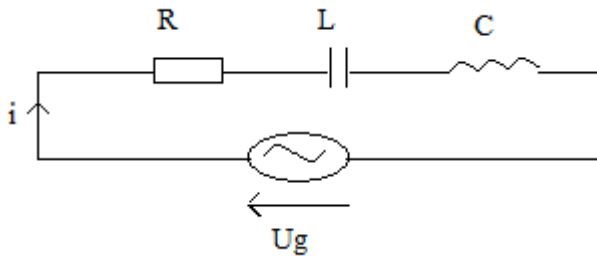
Fréquence de résonance : fréquence pour laquelle la tension et l'intensité sont en phase

A cette fréquence, on peut relever une intensité maximale.

Le facteur de qualité caractérise l'acuité (caractère aigüe ou non du phénomène de résonance en intensité).

	Expérience	Modèle
Fréquence de résonance	$f_{0,i} = (1580 \pm 40)Hz$ $f_{0,\varphi} = (1570 \pm 10)Hz$	$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = (1585 \pm 21)Hz$ $\frac{\Delta f_0}{f_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L}{L} \pm \frac{\Delta C}{C}\right)$
Intensité maximale	$I_m = (12,8 \pm 0,2)mA$	$I_{m,th} = \frac{E_m}{R_{tot}} = \frac{2}{157,8}12,67mA$
Facteur de qualité	$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = 9,1mA$ $\Delta f = (230 \pm 20)Hz$ $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = (6,9 \pm 0,8)$	$Q_{th} = \frac{1}{R_{tot}}\sqrt{\frac{L}{C}} = 6,4$

- Théorie



Loi des mailles : $U_g = U_L + U_R + U_C$

$$\text{Avec } \begin{cases} U_R = R \cdot i \\ U_L = L \cdot \frac{di}{dt} \\ i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow U_g = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + U_C$$

En dérivant cette expression, on obtient $0 = R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{dU_C}{dt}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i$$

On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ la pulsation propre,

la fréquence propre est donnée par $f_0 = \frac{\omega(0)}{2\pi}$

et on pose $Q = \frac{L\omega(0)}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité

On a alors l'équation différentielle

$$0 = \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega(0)}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 \cdot i$$

$$\text{En tension : } \begin{cases} U_R = R \cdot i \\ U_L = jL\omega i \\ U_C = \frac{i}{jC\omega} \end{cases} \Rightarrow U_g = (1 - LC\omega^2) \cdot U_C + jRC\omega \cdot U_C \Rightarrow \underline{U_C} = \frac{E(0)}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

$$\text{D'où : l'expression de l'intensité } I = \frac{jC\omega E(0)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{E(0)}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

La phase est donnée par : $\phi = \text{Arg}(\underline{U_C}) = \text{arg}(\text{numérateur}) - \text{arg}(\text{dénominateur}) = -\text{arg}(\text{dénominateur}) = -\text{arctg}\left(\frac{Im}{Re}\right)$
car $\text{arg}(E(0)) = 0$ (réel positif)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi &= -\text{Arg}[1 - LC\omega^2 + jRC\omega] \\ &= -\text{Arg}[j(RC\omega - j(1 - LC\omega^2))] \\ &= -\frac{\pi}{2} - \text{Arg}[RC\omega - j(1 - LC\omega^2)] \\ &= -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(-\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \text{arctg}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) \end{aligned}$$

Remarque : ϕ correspond au déphasage tension $\rightarrow$ intensité. Le déphasage intensité $\rightarrow$ tension peut être noté ϕ' et on a $\phi' = \frac{\pi}{2} + \phi$

- MPSI

$$\underline{E} = \underline{Z_C} I + \underline{Z_L} I + \underline{Z_R} I = \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R \right) I$$

Loi des mailles :

$$E_m = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} I_m$$

En module :

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Amplitude de I :

Pour $\omega \rightarrow 0$, $\text{Im} \rightarrow 0$ et pour $\omega \rightarrow +\infty$, $\text{Im} \rightarrow 0$. Lorsque $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, Im est max $I_m = I_{\max} = \frac{E_m}{R}$ et

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ pulsation de résonance.

Pour une certaine valeur de la pulsation l'amplitude du courant est max, on parle alors de résonance en intensité.

On définit alors la bande passante, c'est-à-dire l'intervalle de pulsation (ou de fréquence) telle que : $I_m \geq \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$. On

a alors pour expression de la bande passante : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$ soit $Q = \frac{1}{R_{\text{tot}}} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Le facteur de qualité caractérise l'acuité (caractère aigüe ou non du phénomène de résonance en intensité).