

Leçon 8 : Oscillateurs

Biblio :

Carte mentale :

- H-prépa mécanique mpsi ou pcsi
- L'astronomie en questions
- Sujet physique agrégation interne 2017

Partie post-bac :

1001 questions PCSI p 352 (via exercice sur le pendule pesant)

BUP 799 : article « du réveil à la montre à quartz »

H-prépa exercices problème mpsi p 353 (exercice quartz)

Carte mentale :

Introduction :

Le XVII^e siècle voit l'apparition d'une nouvelle pratique de la science, fondée sur de véritables expériences, libérée de la domination de l'Eglise. Des chercheurs comme Galilée, Kepler, Descartes ou Newton proposent une nouvelle approche du monde, fondée sur l'observation exacte de la nature. Avoir à sa disposition des instruments précis pour faire des mesures exactes devenait alors indispensable. La mesure du temps est évidemment au centre des préoccupations de cette époque. Les instruments de mesure, jusqu'alors, indiquaient le temps de manière très imprécise et n'affichaient que les heures. Il fallut trouver des dispositifs plus adaptés. C'est le pendule qui allait bientôt jouer un rôle primordial dans cette quête.

Galilée, avant de comprendre l'utilité d'un pendule pour mesurer un temps, essayait de mesurer des temps pour ses expériences de mécanique en mesurant le rythme cardiaque des personnes. Le problème était que le rythme cardiaque varie d'une personne à une autre et peut varier aussi pour une même personne selon son stress... Il fallait donc une autre méthode pour mesurer un temps.

Galilée (1564-1642) aurait découvert les propriétés du pendule en observant le lustre de la cathédrale de Pise osciller. Il aurait ainsi remarqué que les balancements du lustre conservaient la même durée, bien que leur oscillation diminuât.

Il faut dire que le pendule, par son mouvement régulier, intrigue les observateurs : Forçons-le à battre plus rapidement, il va toujours revenir à son mouvement propre ! Galilée devina déjà des possibilités de son application à la mesure du temps. A la fin de sa vie, il eut l'idée de réaliser une horloge utilisant un pendule comme régulateur. Mais ce sera à **Christiaan Huygens** (1629-1695), savant et mathématicien hollandais, que reviendra le privilège de construire en 1657 la première horloge viable, réglée par un pendule.

Quel changement ! L'introduction de ce régulateur fut une amélioration considérable pour la mesure du temps et permit de réaliser à peu de frais un très grand perfectionnement. De nombreuses horloges furent équipées de ce nouveau dispositif. Voilà pourquoi on parle encore aujourd'hui d'une « pendule » pour dire horloge !

Partie 1 : Le pendule pesant

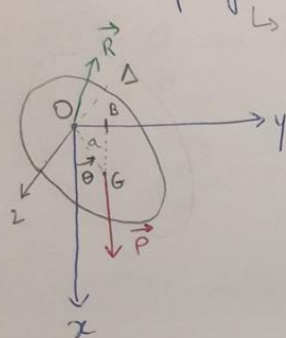
①

Temps - fréquence

Post-Bac - Le Pendule Pesant. 2001 questions PCSEI p 352.

Soit un solide de masse m , mobile autour d'un axe horizontal $\Delta = O_2$ ne passant pas par son centre de masse G est tel que $OG = a$.
 Son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ est J_Δ et la liaison en O est parfaite.

$\hookrightarrow M_O(\vec{R}) = 0 \Rightarrow$ liaison bien huilée, pas grippée et donc, en l'absence de frottements, le mt en reg libre n'est pas amorti.



Système : solide de masse m
 Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Forces : Poids $\vec{P}$
 Réaction de l'axe $\vec{R}$

• Théorème du moment cinétique :

$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum M_\Delta$

$\uparrow$ Moment d'inertie $\uparrow$ Moment des forces - axe

$M_O(\vec{R}) = 0$ (liaison parfaite)

$M_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg a \sin \theta \end{vmatrix}$

Rq : Se trouve aussi en faisant le produit de la force mg par le bras de levier $OB = a \sin \theta$ (distance de la droite d'action de la force à l'axe de rotation Δ)
 avec signe "-" car le poids a tendance à faire tourner le solide suivant -

d'où $J_\Delta \ddot{\theta} = -mg a \sin \theta$ (1)

Remarque : Pour ajouter des forces de frottement du à l'axe de rotation il faut rajouter un couple de force de frottement et ne pas calculer le moment d'une seule force de frottement (puisque'il y en a tout autour de l'axe)

Avec des frottements fluides : On suppose que le moment de freinage correspondant est proportionnel à la vitesse de rotation : $K \frac{d\theta}{dt}$

• Période / fréquence

▷ Oscillations de faible amplitude:

$$(1) \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} = -mga \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mga}{J_{\Delta}} \theta = -\omega_0^2 \theta$$

avec ω_0 : pulsation propre du syst.

On retrouve l'équa diff d'un oscillateur harmonique d'où des oscillations sinusoïdales de période:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}}$$

indpt θ_0

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mga}{J_{\Delta}}}$$

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}} = \text{s}^{-1}$$

Rq: Pendule simple (masse m quasi ponctuelle à l'extrémité d'une tige (pt) de masse négligeable, de longueur $a = l = OG$)

$$J_{\Delta} = ml^2 \text{ d'où } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

▷ angles plus grands:

T_1 dépend de θ_0

Formule de Borda: $T_1 = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

▷ Jusqu'à quel angle θ_0 l'écart entre T_1 et T_0 ne dépasse-t-il pas 1% ?

(3)

+ l'amplitude est grande, + la période est grande.

Écart relatif: $\frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{\theta_0^2}{16} \leq 0,01 \Leftrightarrow \theta_0^2 \leq 0,16$

$$\theta_0 \leq 0,4 \text{ rad soit } \approx 23^\circ$$

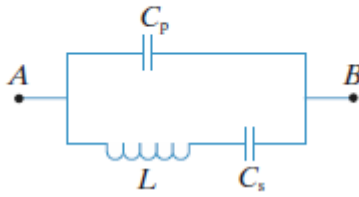
Rq: Souvent, ds énoncés, petits angles $\leq 20^\circ$.

Le problème de ce type d'oscillateurs est que la fréquence de résonance peut varier facilement car elle dépend de la masse, de g , de a , paramètres pouvant évoluer dans le temps. Ces oscillateurs ne peuvent donc pas constituer des horloges très précises, il faut trouver autre chose...

Partie 2 : Horloge à quartz

A. Le résonateur à quartz (H-prépa exercices et problèmes p 354)

Entre ses deux bornes A et B, on peut donner pour un quartz le circuit équivalent schématisé ci-dessous.

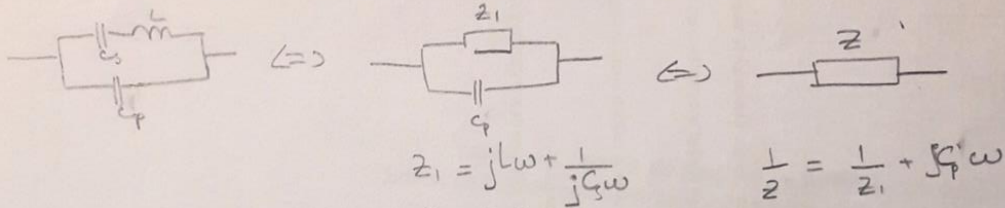


1 • Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ entre A et B en fonction de L , C_s , C_p et de la pulsation ω .

Mettre $\underline{Z}$ sous la forme $\underline{Z} = j \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)}$.

Identifier ω_s et ω_p .

a) Pour $R = 0$



$$\frac{1}{Z} = \frac{jC_s \omega}{1 - LC_s \omega^2} + jC_p \omega$$

$$= \frac{jC_s \omega + jC_p \omega - jLC_s C_p \omega^3}{1 - LC_s \omega^2}$$

$$Z = \frac{1 - LC_s \omega^2}{jC_s \omega + jC_p \omega - jLC_s C_p \omega^3} = \frac{\frac{j}{LC_s} (1 - LC_s \omega^2)}{\frac{j}{LC_s} (jC_s \omega + jC_p \omega - jLC_s C_p \omega^3)}$$

$$= \frac{j \left(\frac{1}{LC_s} - \omega^2 \right)}{-\frac{\omega}{L} - \frac{C_p}{LC_s} \omega + C' \omega^3} = \frac{j \left(\frac{1}{LC_s} - \omega^2 \right)}{C_p \omega \left(\omega^2 - \frac{1}{LC_p} - \frac{1}{LC_s} \right)}$$

$$C' = C_s C_p$$

$$= \frac{j \left(\frac{1}{LC_s} - \omega^2 \right)}{C' \omega \left[\omega^2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s} \right) \right]}$$

$$= \frac{j (\omega_s^2 - \omega^2)}{C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)}$$

$$\omega_s^2 = \frac{1}{LC_s}$$

$$\omega_p^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s} \right) = \frac{1}{L} \left(\frac{C_s + C_p}{C_p C_s} \right)$$

• Comparons ω_s^2 et ω_p^2 (pour savoir laquelle est la + grande)

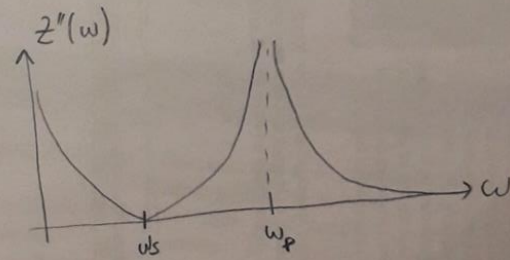
$$\frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} = \frac{1 (C_s + C_p) \cancel{LC_s}}{\cancel{L} C_p \cancel{C_s}} = \frac{C_s + C_p}{C_p} > 1 \Rightarrow \omega_s < \omega_p$$

• BF : $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow +\infty$

• $\omega = \omega_s \Rightarrow Z''(\omega) = 0$

• $\omega = \omega_p \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow +\infty$

• $\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow 0$



• $e(t) = Z''(\omega) i \Rightarrow i \text{ max qd } Z'' \text{ min c'ed pr } \omega = \omega_s \Rightarrow \text{R\'esonance}$

Pour $\omega = \omega_s$, on a une résonance en intensité.

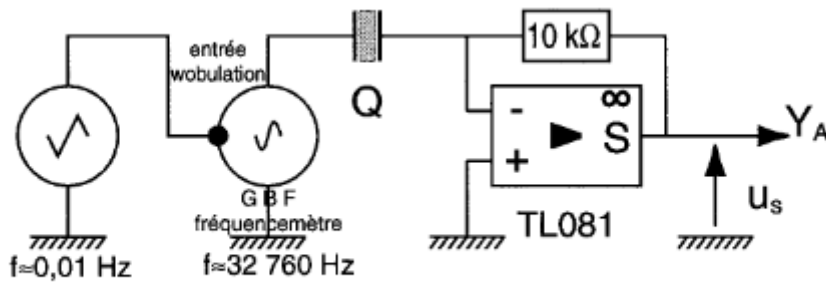


Figure 7 : Montage expérimental.

Les GBF actuels font directement la wobulation. On le règle pour $f=0,01\text{Hz}$, soit $T=100\text{s}$ et on observe la courbe de résonance via le convertisseur courant – tension à l'oscilloscope. (permet de s'affranchir d'une résistance).

L'amplificateur opérationnel monté en convertisseur courant-tension permet de visualiser u_s , l'image de l'intensité qui traverse le quartz (Q). Compte tenu de la présence de l'amplificateur opérationnel, ce montage permet d'alimenter le quartz sous une tension sinusoïdale d'amplitude constante, même à la résonance, lorsque son impédance est faible.

L'expérience est spectaculaire : on obtient une tension d'amplitude élevée de 3 à 10 V uniquement pour des fréquences voisines de 32 768 Hz à 2 ou 3 Hz près. Le quartz est un composant électronique fragile, aussi faut-il veiller à régler la valeur de l'amplitude de la tension du GBF en-dessous de 1 V. (Lors d'une manipulation, la tension de sortie a atteint plus de vingt fois la valeur de la tension d'entrée à la résonance, le quartz ne s'en est pas remis.)

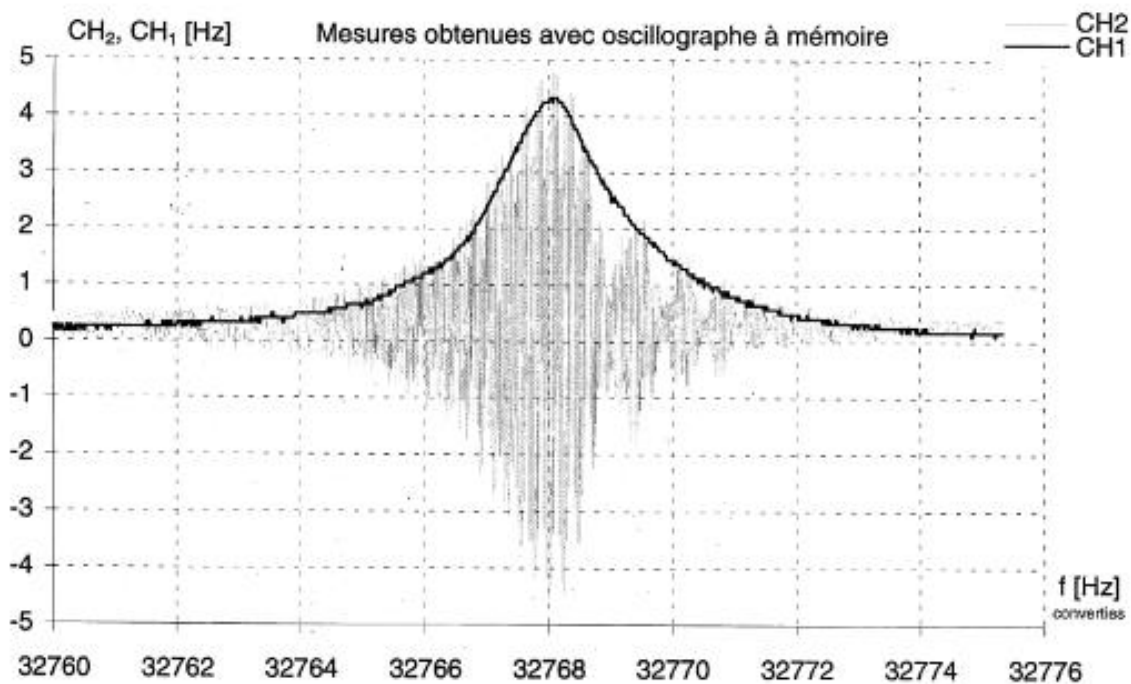


Figure 8 : Graphe de résonance.

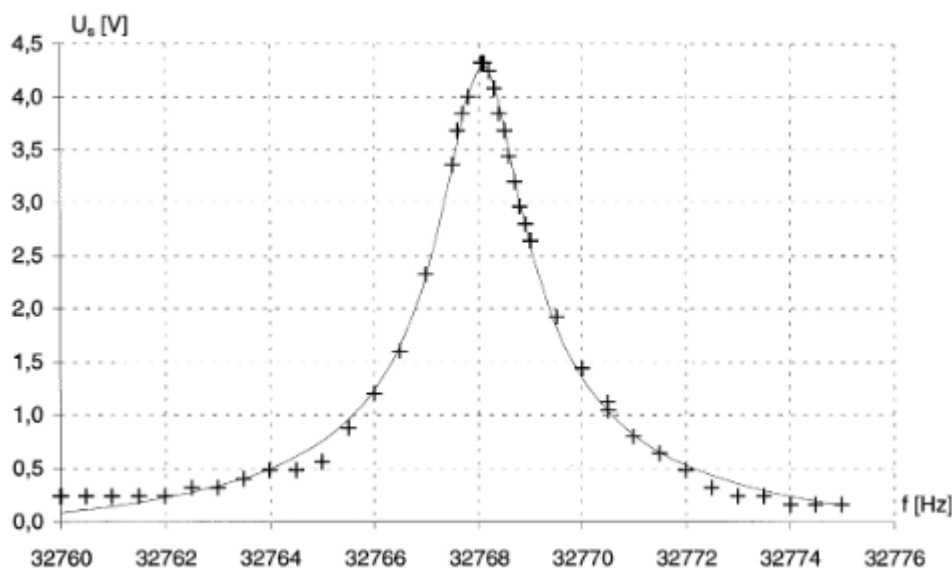


Figure 10 : Courbe de résonance d'un quartz.

(Ce type de graphe est à rapprocher de celui correspondant à la résonance d'intensité dans un circuit RLC série. Cette analogie militerait pour une impédance à caractère purement résistif à la résonance.)

On définit alors la Bande-Passante : c'est l'intervalle de fréquence telle que $U_s \geq \frac{U_{s,max}}{\sqrt{2}} = \frac{4,8}{\sqrt{2}} \approx 3,0V$

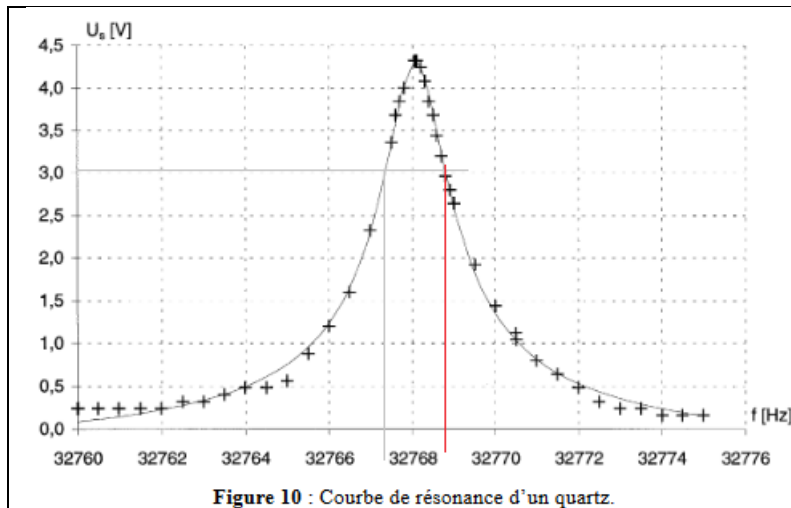


Figure 10 : Courbe de résonance d'un quartz.

On trouve $f_1 = 32767,3 \text{ Hz}$ et
 $f_2 = 32768,8 \text{ Hz}$ soit
 $\Delta f = f_2 - f_1 = 1,5 \text{ Hz}$

Soit Q : le facteur de qualité (caractérise l'acuité de la résonance).

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{32768}{1,5} \approx 22000$$

ce qui est facteur de qualité très grand et montre donc une résonance très fine, qui permettra donc de mesurer des temps avec précision.

Rq : Facteur de qualité pour le diapason de l'ordre de 1000 pour le La 440 avec un pic de résonance fin.

Partie Péda :

- Classe : TS
- Partie du programme : Loi et modèles

Mesure du temps et oscillateur, amortissement Travail d'une force. Force conservative ; énergie potentielle. Forces non conservatives : exemple des frottements	<i>Pratiquer une démarche expérimentale pour mettre en évidence :</i> - les différents paramètres influençant la période d'un oscillateur mécanique ; - son amortissement. Établir et exploiter les expressions du travail d'une force constante (force de pesanteur, force électrique dans le cas d'un champ uniforme). Établir l'expression du travail d'une force de frottement d'intensité constante dans le cas d'une trajectoire
--	---

- Organisation : 2h demi-groupe TP.
- Pré-requis :
- Objectif(s) :

		Niveau de maitrise			
Compétences générales	Compétence évaluée	A	B	C	D
S'APPROPRIER	Identifier le problème et le décrire avec ses mots.				
ANALYSER	Relier les documents entre eux.				
	Conduire un raisonnement scientifique.				
REALISER	Identifier les motifs sur les ECG				
	Déterminer les périodes sur les 3 ECG				
	Déterminer les fréquences cardiaques des 3 ECG				
	Utiliser la formule de la fréquence correctement.				
	Calculer les fréquences cardiaques correspondantes.				
VALIDER	Comparer la fréquence cardiaque du patient avec celles calculées.				
COMMUNIQUER	Rédiger une argumentation répondant au problème posé.				
	Présenter sous forme de lettre en utilisant un langage adapté.				