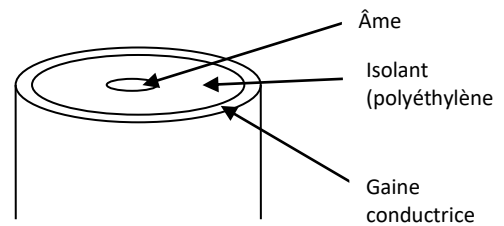


5-L et M- Propagation libre et guidée

Bibliographie : BELLIER - Physique expérimentale au concours de l'enseignement (électricité électromag, acoustique, ondes) (voir annexe)
1000 et 1 questions (PC-PC*)

Application au câble coaxial.

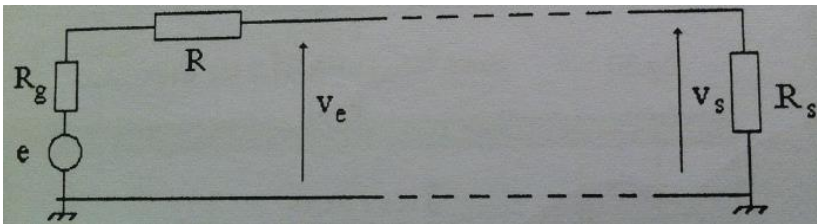
Il est constitué d'une âme (matériau conducteur) entouré d'un isolant (fréquemment polyéthylène de permittivité ϵ_r) que la gaine conductrice recouvre. L'ensemble est protégé par une gaine isolante.



❖ Mise en évidence de l'onde réfléchie.

Utilisation d'un GBF qui envoie un signal crêteaux de fréquence grande afin que le crêteau ne dure pas plus d' $1\mu s$ (pour un câble de 100m) avec un duty <50% afin que la partie haute et basse soit dissymétrique (la partie haute doit être moins longue que la basse).

On réalise le montage suivant



Remarque :

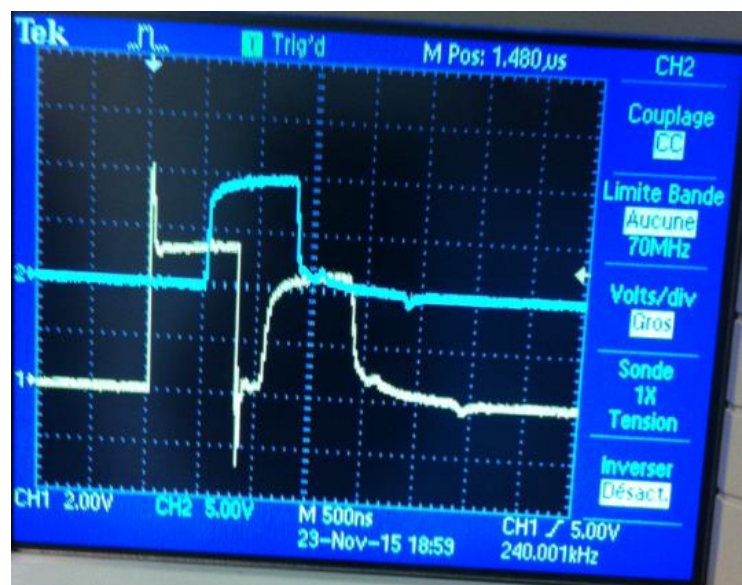
- Sur l'oscilloscope il faut penser à changer l'origine des temps et la mettre à gauche ainsi que de rajouter un offset sur le GBF afin d'avoir la 0V comme sur le schéma.
- Sur la photo on peut voir que v_e est mesuré juste avant R .

On fait ce montage pour avoir sur l'oscillo tous les échos, mais devant le jury il faut refaire le montage étape par étape :

1^{ère} étape : On règle juste le GBF sans brancher le câble coax et on visualise bien sur l'oscillo les 10 V.
Dés qu'on branche le câble la tension aux borne du GBF vu sur l'oscillo chute, car on a un pont diviseur de tension et que l'oscillo débite (voir remarque)

On branche à la sortie la voie 2 de l'oscillo (circuit ouvert donc impédance de sortie infinie (tout comme l'impédance de l'oscillo)).

On constate que le signal de sortie a une amplitude 2 fois plus grande que le signal d'entrée (5V), car à la sortie c'est la superposition du signal incident et du signal réfléchi (donc $5 + 5 = 10 V$)



On voit bien l'onde réfléchie arrivée à l'entrée (avec une certaine atténuation), mais il n'y a pas de 2^{ème} onde réfléchie à cause de l'adaptation d'impédance (résistance de sortie du GBF = résistance caractéristique du câble, mais ne pas en parler de suite.)

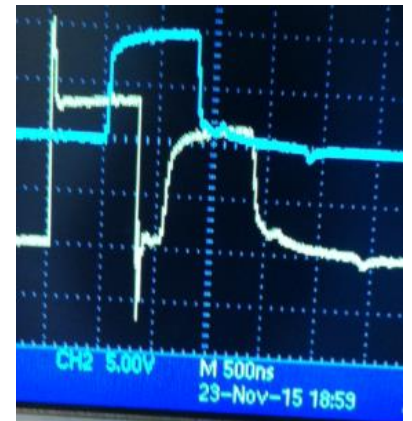
Calculer la vitesse de propagation de l'onde :

Pour ce faire on mesure Δt et on obtient $v = \frac{2L}{\Delta t}$: d'après la photo $\Delta t = 2 \times 500ns$

$$v = \frac{2L}{\Delta t} = \frac{100m}{500ns} = 2 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$$

On peut même retrouver la constante diélectrique de l'isolant dans le câble coax puisque :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}}$$



2^{ème} étape : On branche en sortie un potentiostat (de 0 à 100 Ω) on observe différente chose suivant si on est en court-circuit $R_s = 0$ et avec $R_s = R_c$

Comme dans le cas de l'échelle à perroquet suivant la valeur de R_s (par rapport à $R_c = \pm 70 \Omega$ qui est donné par le constructeur du câble, souvent c'est 50 Ω et dans ce cas on a adaptation d'impédance lorsque le 1^{er} échos arrive sur le GBF de résistance interne 50 Ω)

on va pouvoir visualiser une onde réfléchie à l'entrée de l'oscilloscope c'est pourquoi sur la voie 1 on a 2 double câble (1 pour le signal émis par le GBF et l'autre à l'entrée du câble pour visualiser l'onde réfléchie).

Dans ce cas le coefficient de réflexion vaut $r = \frac{R_s - R_c}{R_s + R_c}$

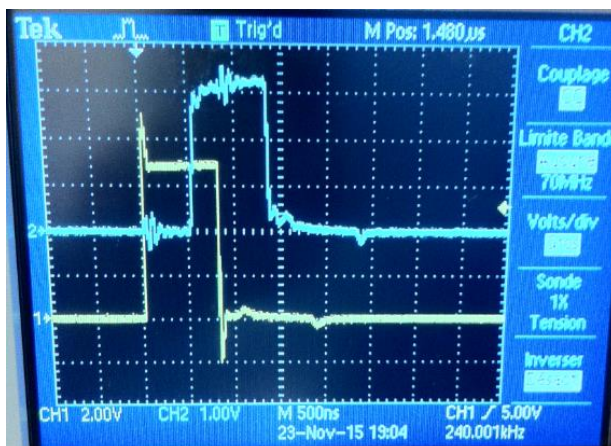
- $R_s \rightarrow \infty$ (j'ouvre le câble) donc $i=0$ (nœud de courant, ventre de tension) et $r \rightarrow 1$

Le 1^{er} créneau positif correspond à l'onde émise par le GBF et le 2nd positif également ($r=1$) au 1^{er} écho (onde réfléchie).

Pour ce qui est du 3^{ème} créneau déformé il s'agit de du 2^{ème} écho.



- $R_s = R_c \rightarrow r = 0$ pas d'onde réfléchie (on observe plus les échos)



La tension en sortie n'est égale à 2 fois la tension en entrée car cette fois on a une résistance et donc on peut appliquer la loi d'Ohm pour calculer le courant à la sortie du câble.

Dans notre cas $R_s = R_c = 50 \Omega$.

$$\text{Donc } i = \frac{u}{R_s} = \frac{3}{50} = 0.06 A = 60mA$$

- $R_s \rightarrow 0$ donc $V=0V$ (nœud de tension et ventre de courant) et $r \rightarrow -1$.

Le 1^{er} créneau positif correspond à l'onde émise par le GBF et le 2nd positif également ($r=-1$) au 1^{er} écho (onde réfléchie).
Pour ce qui est du 3^{ème} créneau déformé il s'agit de du 2^{ème} écho.



Pour observer le 2^{ème} échos il faut placer une résistance en entré du GBF juste avant le câble pour éviter une éventuelle adaptation d'impédance lorsque l'onde réfléchie arrive au niveau du GBF



Dans le cas ou on a aucune résistance en sortie : sortie en court-circuit. On va avoir une onde réfléchie et on va pouvoir observer le phénomène d'onde stationnaire.

- 1^{ère} méthode simple : ne parler que des échos et comme on a la superposition de 2 ondes de même fréquence et de direction opposé on va avoir des ondes stationnaires.
- 2^{ème} méthode plus compliqué : montrer ces ondes stationnaires :

Pour se faire : il faut montrer les éventuels nœuds et ventre de tension à l'entrée du GBF (pas besoin de regarder la sortie puisque on a forcément un nœud de courant à la sortie si on a pas de charge donc un résistance infinie)

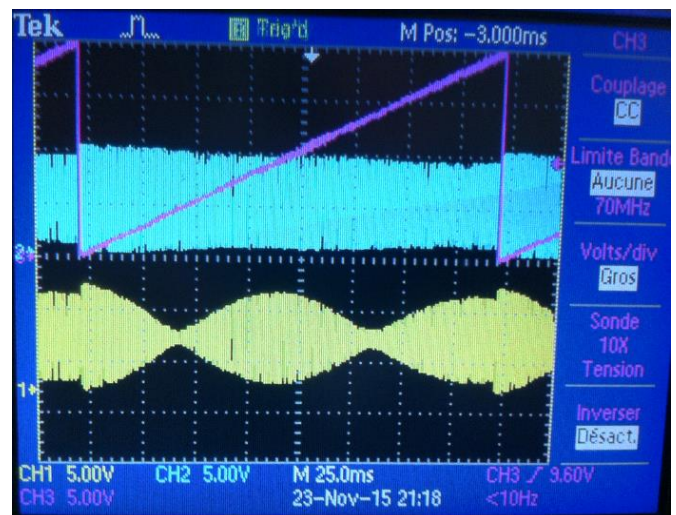
Manip : synchroniser l'oscillo à la sortie VCG IN (sweep out (balayage)) du GBF.

On demande à l'oscillo de balayer en fréquence (sweep start : 6kHz et sweep end 20 Mhz). Et brancher cette sortie sur la ligne 3 de l'oscillo, sur laquelle il va falloir TRIGGER.

On observe :

$R_s \rightarrow \infty \rightarrow I_s \rightarrow$ **noeud de courant et U_s**
 $\rightarrow$ **ventre de tension (vert)**

En faisant une droite d'étalonnage on peut trouver à quelle fréquence on a les nœuds de courant à l'entrée du GBF.



Détaille des calculs : (voir annexe)

Attention !!!!!!!!!!!!!!! On ne visualise pas une onde stationnaire classique comme dans la corde de Melde ou le tube de Kundt

⚠ On ne visualise pas une onde stationnaire classique dans la corde de Melde ou le tube de Kundt.

Puisque la on visualise à un x donné c'est à dire $x=0$

Nous on change f donc $\omega = 2\pi f$

debut du cable $3V$ $\leftarrow L$ $\rightarrow$ debut du cable

onde emise $\rightarrow$ onde reflechie

fin du cable

circuit ouvert $n=1/2$ donc l'onde reflechie a la m^{eme} amplitude

ou c $\lambda = \frac{v}{f}$ $\leftarrow c = 2 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

change λ car f change.

variable pour f donnée.

Dans cette situat^{ion} on a un ventre.

si f change

debut Δt debut

$\cos(\omega t)$ $\cos(\omega(t + \Delta t))$

Pour cette fréquence on un noeud

la ventre. $\omega \Delta t = n 2\pi$

$2\pi f \times \frac{2L}{v} = n 2\pi$

$f_n = \frac{n v}{2L}$

noeud. $\omega \Delta t = 2\pi(n + \frac{1}{2})$

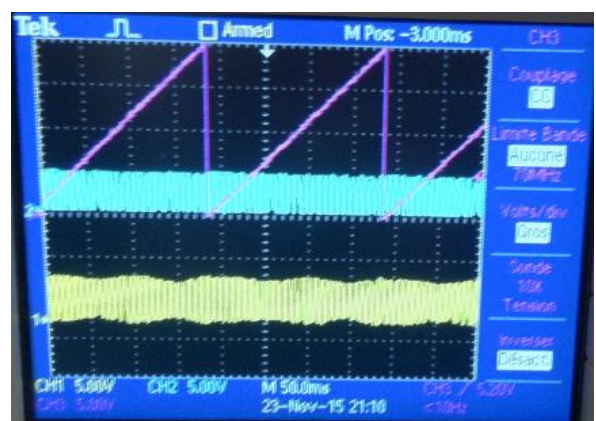
$2\pi f \times \frac{2L}{v} = 2\pi(n + \frac{1}{2})$

$f_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{v}{2L}$

Nous on fait $(f_{n+1} - f_n) = \frac{v}{2L}$ dans les 2 cas.

Si l'on branche une résistance de sortie on peut observer l'adaptation d'impédance lorsque l'on se place à $R=50 \Omega$

On n'observe plus d'onde stationnaire et les nœuds et ventre de tension ont disparue.

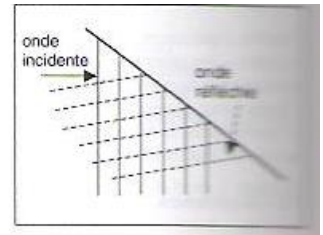


Remarque : dans la cuve à onde il y a aussi adaptation d'impédance (sinon toutes les ondes se superposeraient et on ne verrait plus rien) grâce à l'inclinaison des bords de la cuve.



Dans un premier temps on visualise la propagation de l'onde
Pour cela il faut régler l'excitateur de façon à ce qu'il ne baigne pas dans l'eau mais qu'il soit en contact avec celle-ci par capillarité.

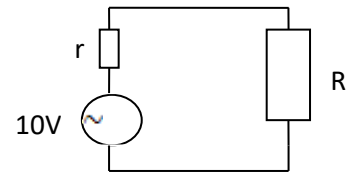
Dans un 2nd temps afin de visualiser le phénomène de réflexion on place une plaque de plexiglas au milieu de la cuve



Rechercher si on peut parler de l'atténuation .

Remarque :

- la hauteur du trigger est très importante (voir photos) il ne doit pas être en dessous du 2^{ème} échos autrement on va avoir un dédoublement du signal.
- L'amplitude du signal émis n'est pas de 10V comme l'indique le GBF mais plutôt de 6V, cela est dû à l'effet pont diviseur. $U = \frac{Rc}{r+Rc} 10$
- L'amplitude du 1^{er} échos qui est réémit à également diminué cela est dû au fait qu'en arrivant sur le générateur de résistance interne $r=50\Omega$ le signal de 6V est réfléchi avec une amplitude de $r = \frac{r-Rs}{r+Rs} = -\frac{6}{5} V$, ces 2 ondes étant superposées on obtient un signal d'amplitude = $6 - 6/5 V$
- En faisant un résonnement analogue on comprend pourquoi l'amplitude du 2^{ème} échos a encore diminué.
- Le 2^{ème} écho est toujours identique (même si il est très peu visible) cela s'explique avec les coefficients de réflexion



Dans le 1^{er} cas l'onde réfléchie ($r=1$ à la sortie du câble) arrive positive mais repart négative car le coefficient de réflexion à l'entrée du câble est toujours négatif $r = \frac{r-Rs}{r+Rs}$ ($R_s > r$) il est une fois de plus réfléchi par la sortie et repart comme il est arrivé négatif, donc il arrive négatif sur l'entrée.

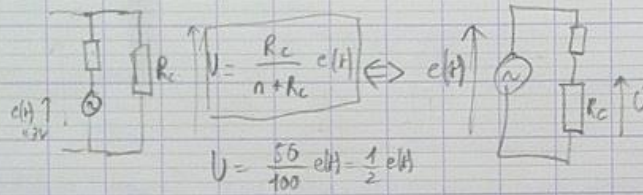
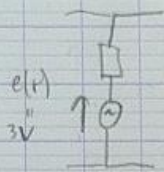
Par un raisonnement analogue pour $r=-1$ à la sortie du câble on trouve que le 2^{ème} écho arrive également négatif sur l'entrée, tout comme dans le 1^{er} cas.

- Analogie *onde électrique* ↔ *onde sonore*
 $tension (V) \leftrightarrow pression (p)$
 $courant (i) \leftrightarrow déplacement (x)$

Cable: $\varnothing = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ $L = \frac{1}{C v^2} = \frac{1}{10^9 \cdot 10^{12} \times (2 \cdot 10^{-8})^2} = 250 \text{ nH}$

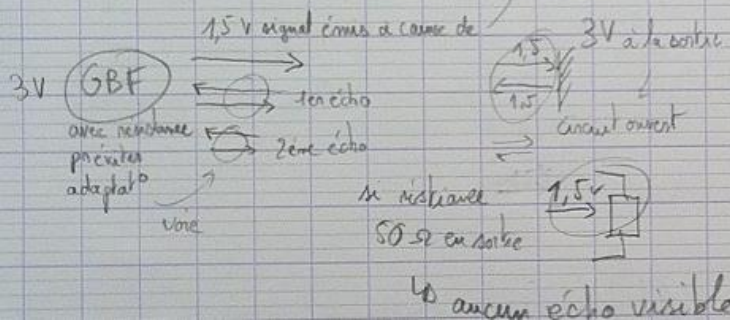
Sams cable

avec cake (avec circuit ouvert $i = 0$ $R_g \rightarrow \infty$) (Pour diviseur).



$$R_c = 50 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

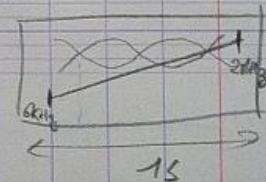
$$L = 253 \text{ mH} \cdot \text{m}^{-1}$$



Replay sweep: 6 kHz à 2 MHz

~ km
sonke VCF IN

Il faut temps de la rampe $\approx 1s$ donc néglige balayage à $100ms$ de manière à avoir



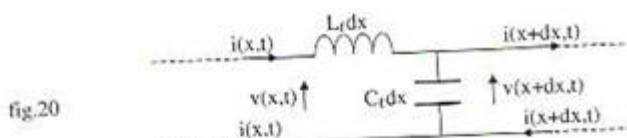
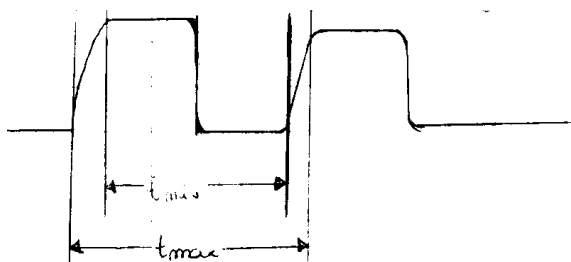
- ❖ Calcul de la célérité de l'onde dans le câble.

Le câble peut être modéliser de la façon suivante :

Il est possible de retrouver la célérité de l'onde EM dans le câble en connaissant la longueur du câble = d , et le temps d'arrivé du 1^{er} écho.

$$C = \frac{2d}{t}$$

$$C_{théorique} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{C_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ (savoir retrouver à l'aide des équations de Maxwell)}$$



Loi des nœuds

Loi des mailles

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = C_r dx \frac{\partial v(x + dx, t)}{\partial t}$$

$$v(x,t) - v(x+dx,t) = L_r dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

soit

$$\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = -C_f \frac{\partial v}{\partial t}$$

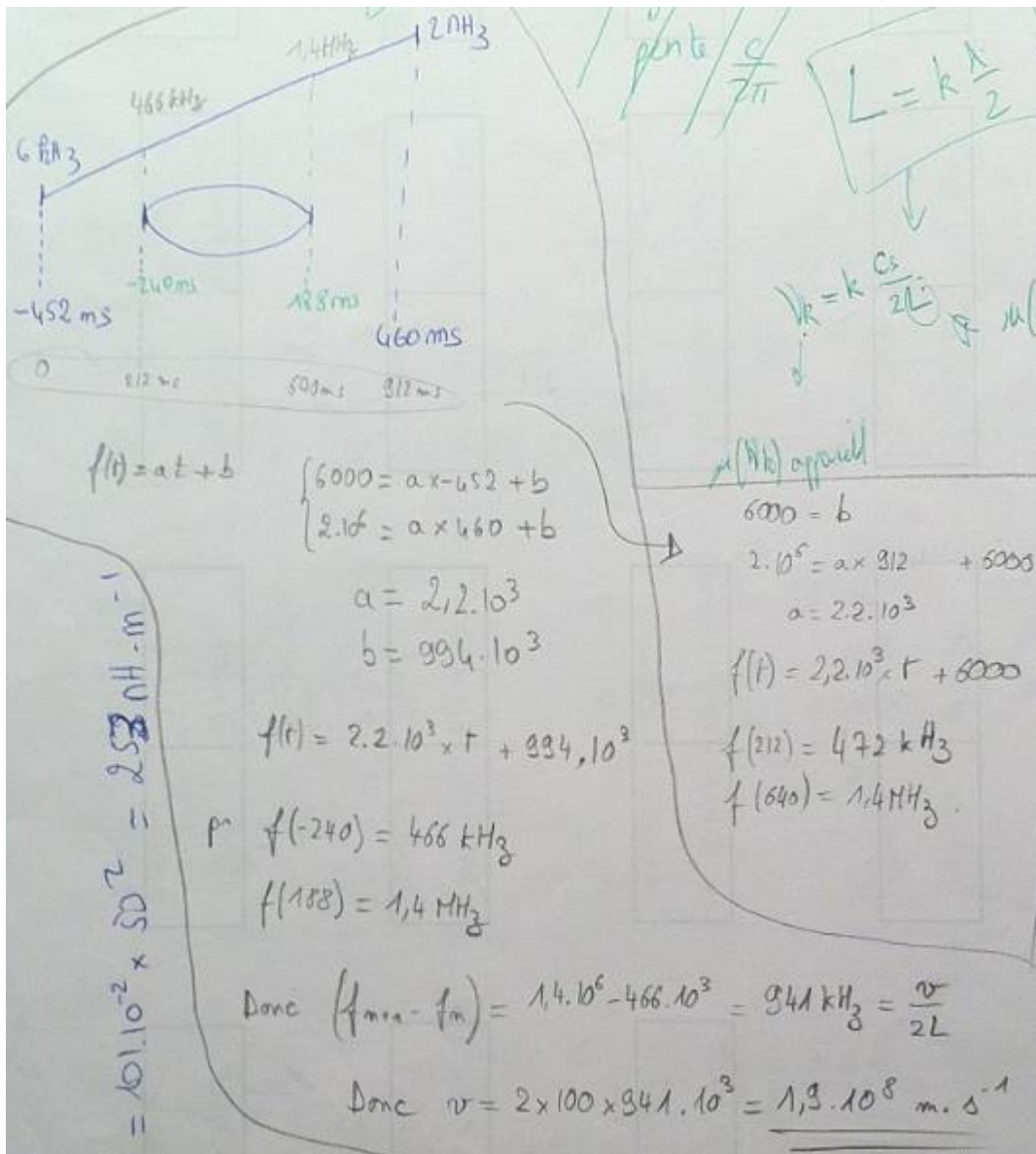
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L_r \frac{\partial i}{\partial t}$$

On arrive à l'équation de propagation $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ avec $c^2 = 1/C_L L_t$

La solution générale de cette équation est de la forme générale :

$$V(x,t) = v_+(t - x/c) + v_-(t + x/c)$$

Annexe



15.1.5 Onde électrique dans un câble coaxial

a) Présentation du câble coaxial

Un tel type de câble possède la structure concentrique suivante :

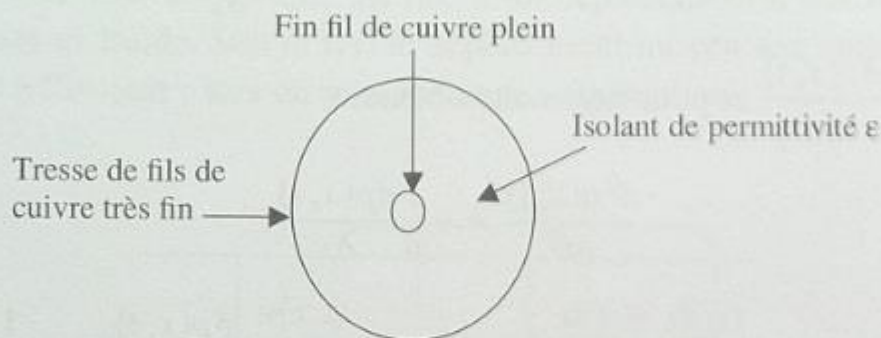


Figure 15.6

La structure extérieure constituée par la tresse plate de fils très fin joue le rôle de cage de Faraday et isole le fil central des perturbations électromagnétiques extérieures. C'est pour cette raison que l'on utilise ce type de câble pour le transport de données comme les signaux TV et dans les réalisations de réseaux informatiques. L'étude de la structure montre que la tresse joue un rôle équivalent à une bobine et qu'il existe aussi un condensateur cylindrique entre le fil plein et la tresse. On modélise alors un tronçon de câble coaxial entre les abscisses x et $x+dx$ par le schéma dit à « constantes

réparties » suivant, en négligeant toute perte énergétique (pas de résistance de fuite au condensateur et pas de résistance interne à la bobine) :

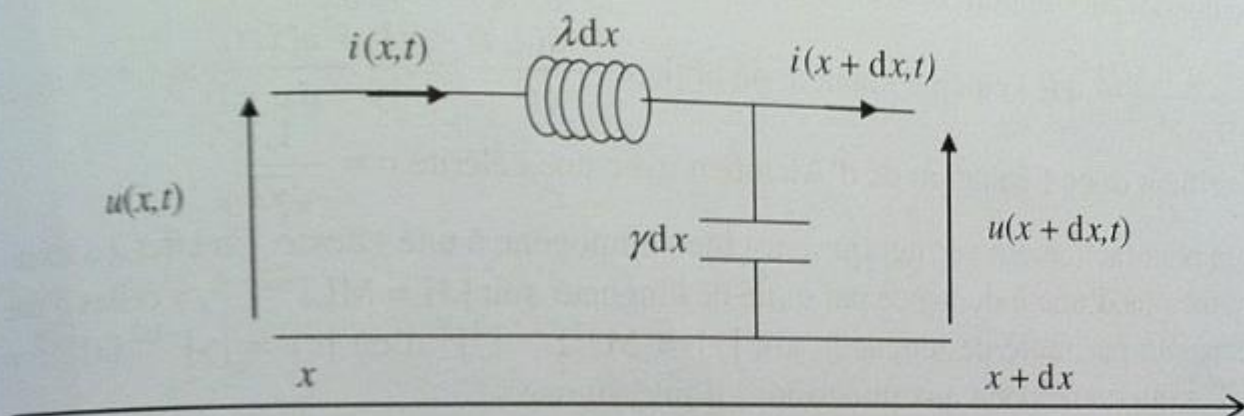


Figure 15.7

Si λ représente l'inductance linéique et γ la capacité linéique du câble, ce morceau de câble de longueur dx possède une inductance $dL = \lambda dx$ et une capacité $dC = \gamma dx$.

b) Mise en équation

Écrivons les lois des mailles et des nœuds il vient :

$$\begin{cases} u(x, t) = \lambda dx \frac{\delta i(x, t)}{\delta t} + u(x + dx, t) \\ i(x, t) = \gamma dx \frac{\delta u(x + dx, t)}{\delta t} + i(x + dx, t) \end{cases}$$

(En remarquant que $u_L = L di/dt$ et que $i_c = C du_c/dt$). Écrivons que $u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\delta u(x, t)}{\delta x} dx$ et que $i(x + dx, t) - i(x, t) = \frac{\delta i(x, t)}{\delta x} dx$, il vient :

$$\begin{cases} -\frac{\delta u(x, t)}{\delta x} = \lambda \frac{\delta i(x, t)}{\delta t} \\ -\frac{\delta i(x, t)}{\delta x} = \gamma \frac{\delta u(x + dx, t)}{\delta t} \end{cases}$$

En remplaçant $u(x + dx, t)$ par $u(x, t) + \frac{\delta u(x, t)}{\delta x} dx$ dans la seconde équation, il vient

$\frac{\delta u(x + dx, t)}{\delta t} = \frac{\delta u(x, t)}{\delta t} + \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x \delta t} dx$. En restant au premier ordre on obtient le système d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\delta u(x, t)}{\delta x} = \lambda \frac{\delta i(x, t)}{\delta t} \\ -\frac{\delta i(x, t)}{\delta x} = \gamma \frac{\delta u(x, t)}{\delta t} \end{cases}$$

359

Pour découpler ces deux relations dérivons la première par rapport au temps et la seconde par rapport à x et remarquons que $\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta t} = \frac{\delta^2 u}{\delta t \delta x}$. Il vient $\frac{\delta^2 i(x, t)}{\delta t^2} = \frac{1}{\lambda \gamma} \frac{\delta^2 i(x, t)}{\delta x^2}$. De la même manière on obtient $\frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta t^2} = \frac{1}{\lambda \gamma} \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2}$. $u(x, t)$ et $i(x, t)$ vérifient donc l'équation de d'Alembert avec une célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma}}$.

On peut facilement vérifier que c est bien homogène à une vitesse. En effet λ a les dimensions d'une inductance par unité de longueur soit $[\lambda] = \text{MLT}^{-2}\text{I}^{-2}$, γ celles d'une capacité par unité de longueur soit $[\gamma] = \text{M}^{-1}\text{L}^{-3}\text{T}^4\text{I}^2$ d'où $[c] = [\gamma]^{-1/2} [\lambda]^{-1/2} = \text{LT}^{-1}$ qui correspond aux dimensions d'une vitesse.

La tension et le courant sont solutions de l'équation d'onde :

$$\frac{\delta^2 s(x, t)}{\delta x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 s(x, t)}{\delta t^2} = 0.$$

c) Résolution et impédance de ligne

Les solutions sont du type $s^+(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ pour une onde de pulsation ω se propageant dans le sens des x croissants et du type $s^-(x, t) = B \cos(\omega t + kx)$ pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants, avec $k = \omega/c$.

Écrivons les solutions générales en notation complexe dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des x croissants : $\underline{u}^+(x, t) = \underline{A} e^{j\omega t} e^{-jkx}$ et $\underline{i}^+(x, t) = \underline{I} e^{j\omega t} e^{-jkx}$ et formons $\frac{\delta u}{\delta x} = -jk\underline{u}$ et $\frac{\delta i}{\delta t} = j\omega \underline{i}$. La relation $-\frac{\delta u(x, t)}{\delta x} = \lambda \frac{\delta i(x, t)}{\delta t}$ devient alors

$$k\underline{u}^+ = \lambda \omega \underline{i}^+ \text{ donc } \underline{u}^+ = \frac{\lambda \omega}{k} \underline{i}^+ = \frac{\lambda kc}{k} \underline{i}^+ = \lambda c \underline{i}^+ = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \underline{i}^+ = Z_C \underline{i}^+, \text{ où } Z_C = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$$

représente l'impédance caractéristique de la ligne telle que $\underline{u}^+(x, t) = Z_C \underline{i}^+(x, t)$.

Que se passe-t-il si on considère maintenant une onde se propageant dans le sens des x décroissant ? $\underline{u}^-(x, t) = \underline{B} e^{j\omega t} e^{+jkx}$ et $\underline{i}^-(x, t) = \underline{I}' e^{j\omega t} e^{+jkx}$. Formons $\frac{\delta u}{\delta x} = +jk\underline{u}$

et $\frac{\delta i}{\delta t} = j\omega \underline{i}$. La relation $-\frac{\delta u(x, t)}{\delta x} = \lambda \frac{\delta i(x, t)}{\delta t}$ devient alors $-k\underline{u}^- = \lambda \omega \underline{i}^-$ donc

$$\underline{u}^- = -\frac{\lambda \omega}{k} \underline{i}^- = -\frac{\lambda kc}{k} \underline{i}^- = -\lambda c \underline{i}^- = -\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \underline{i}^- = -Z_C \underline{i}^-, \text{ où } Z_C = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \text{ représente}$$

l'impédance caractéristique de la ligne telle que $\underline{u}^-(x, t) = -Z_C \underline{i}^-(x, t)$. Cette impédance est caractéristique du câble, elle est indépendante de sa longueur, sa valeur est normalisée à 50 Ω ou à 75 Ω .

Mais mieux expliquer dans l'image d'après en prenant les conditions en bout de ligne :

d) Ondes incidentes et réfléchies : coefficient de réflexion

On considère un câble semi-infini de $-\infty$ à $x = 0$; on place un générateur en $-\infty$ qui engendre l'onde incidente de la forme $\underline{u}^+(x, t) = \underline{A} e^{j\omega t} e^{-jkx}$. En $x = 0$, on place une charge d'impédance Z_e . Cette onde se réfléchit sur l'extrémité du câble avec un coefficient de réflexion r et se propage dans le sens inverse sous la forme $\underline{u}^-(x, t) = \underline{B} e^{j\omega t} e^{+jkx}$. Dans ce cas, où coexistent les deux types d'ondes dans la ligne, nous pouvons donc écrire :

- la tension totale au point x à l'instant t comme la somme des deux tensions simples

$$\underline{u}_{\text{total}}(x, t) = \underline{u}^+(x, t) + \underline{u}^-(x, t) = \underline{A} e^{j\omega t} e^{-jkx} + \underline{B} e^{j\omega t} e^{+jkx} ;$$

- l'intensité totale au point x à l'instant t comme la somme des deux courants simples

$$\underline{i}_{\text{total}}(x, t) = \underline{i}^+(x, t) + \underline{i}^-(x, t) = \frac{1}{Z_C} [\underline{u}^+(x, t) - \underline{u}^-(x, t)] = \frac{1}{Z_C} (\underline{A} e^{j\omega t} e^{-jkx} - \underline{B} e^{j\omega t} e^{+jkx}).$$

Écrivons à présent les conditions aux limites pour $x = 0$.

$$i_{\text{total}}(x = 0, t) = \frac{1}{Z_c}(\underline{A}e^{j\omega t} - \underline{B}e^{j\omega t}) = \frac{1}{Z_e}u_{\text{total}}(x = 0, t) = \frac{1}{Z_e}(\underline{A}e^{j\omega t} + \underline{B}e^{j\omega t}),$$

on se retrouve avec une relation $\frac{1}{Z_c}(\underline{A} - \underline{B}) = \frac{1}{Z_e}(\underline{A} + \underline{B})$ que l'on peut encore écrire sous la forme $\frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \frac{Z_e - Z_c}{Z_e + Z_c} = r$.

Analysons ce résultat ; trois cas se présentent :

- si $Z_e = 0$ (la sortie du câble est en court-circuit) alors $r = -1$, l'onde réfléchie est en opposition de phase avec l'onde incidente ;
- si $Z_e = \infty$ (la sortie du câble est laissée libre) alors $r = +1$, l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente ;
- si $Z_e = Z_c$ alors $r = 0$, il n'y a plus d'onde réfléchie.

Remarque

L'approche théorique des ondes sur la corde et dans le câble coaxial est partiellement inspiré de l'ouvrage *Physique Tout-en-un PSI, PSI**, dir. Marie-Noëlle Sanz et Bernard Salamito, collection « J'intègre », Dunod, 2010. Vous pouvez vous y référer pour plus de détails.

Explication en prenant les conditions aux limites en bout de ligne :

4.1.3. Détermination de l'onde réfléchie

Soit une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants, pour laquelle $v_i(x, t) = Z_c i_i(x, t)$. Si elle se propage vers une terminaison d'impédance Z placée en x_0 , elle ne peut généralement pas satisfaire la condition à la limite $x = x_0$, sauf bien sûr dans le cas très particulier où la ligne est refermée sur son impédance caractéristique : $Z_c = Z$. Nous devons donc envisager, comme dans l'expérience précédente, l'existence d'une onde réfléchie (doc. 19). L'onde incidente étant supposée sinusoïdale de pulsation ω , nous adoptons la notation complexe.

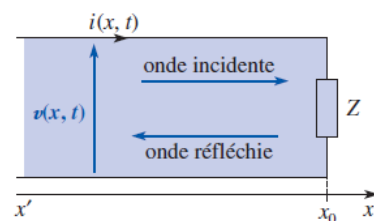
Dans la zone $x < x_0$, l'onde est la superposition :

- de l'onde incidente se propageant dans le sens des x croissants :

$$\begin{cases} \underline{i}_i(x, t) = \underline{I}_{i0}e^{j(\omega t - kx)} = \underline{I}_i(x)e^{j\omega t} \\ \underline{v}_i(x, t) = \underline{V}_{i0}e^{j(\omega t - kx)} = \underline{V}_i(x)e^{j\omega t} \end{cases}$$

où $\begin{cases} \underline{I}_i(x) = \underline{I}_{i0}e^{-jkx} \\ \underline{V}_i(x) = \underline{V}_{i0}e^{-jkx} \end{cases}$ sont les amplitudes complexes de l'onde incidente

avec $\underline{V}_i(x) = Z_c \underline{I}_i(x)$;



Doc. 19. Réflexion en bout de ligne.

- de l'onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants :

$$\begin{cases} \underline{i}_r(x, t) = \underline{I}_{r0} e^{j(\omega t + kx)} = \underline{I}_r(x) e^{j\omega t} \\ \underline{v}_r(x, t) = \underline{V}_{r0} e^{j(\omega t + kx)} = \underline{V}_r(x) e^{j\omega t} \end{cases}$$

où $\begin{cases} \underline{I}_r(x) = \underline{I}_{r0} e^{jkx} \\ \underline{V}_r(x) = \underline{V}_{r0} e^{jkx} \end{cases}$ sont les amplitudes complexes de l'onde réfléchie

avec $\underline{V}_r(x) = -Z_c \underline{I}_r(x)$.

Soit pour l'onde résultante :

$$\begin{cases} \underline{i}(x, t) = \underline{I}(x) e^{j\omega t} = \underline{i}_i(x, t) + \underline{i}_r(x, t) = (\underline{I}_i(x) + \underline{I}_r(x)) e^{j\omega t} \\ \underline{v}(x, t) = \underline{V}(x) e^{j\omega t} = \underline{v}_i(x, t) + \underline{v}_r(x, t) = Z_c(\underline{I}_i(x) - \underline{I}_r(x)) e^{j\omega t} \end{cases}$$

où $\underline{I}(x)$ et $\underline{V}(x)$ sont les amplitudes complexes de l'onde résultante.

Nous en déduisons les relations entre les amplitudes complexes des trois ondes :

$$\begin{cases} \underline{I}_r(x) = \underline{I}_i(x) + \underline{I}_r(x) \\ \underline{V}(x) = Z_c(\underline{I}_i(x) - \underline{I}_r(x)) \end{cases}$$

La condition à la limite $x = x_0$, $\underline{v}(x_0, t) = \underline{Z} \underline{i}(x_0, t)$ ou, en utilisant les amplitudes complexes, $\underline{V}(x_0) = \underline{Z} \underline{I}(x_0)$ conduit à la relation :

$$Z_c(\underline{I}_i(x_0) - \underline{I}_r(x_0)) = \underline{Z}(\underline{I}_i(x_0) + \underline{I}_r(x_0))$$

ou $(Z_c - \underline{Z})\underline{I}_i(x_0) = (Z_c + \underline{Z})\underline{I}_r(x_0)$.

4.1.4. Coefficients de réflexion pour les amplitudes

Le coefficient de réflexion en amplitude, noté $\underline{\rho}$ est le rapport entre l'amplitude complexe de l'onde réfléchie et l'amplitude complexe de l'onde incidente au point où l'onde est réfléchie.

Nous déduisons des relations entre l'amplitude complexe de l'intensité et de la tension obtenues au paragraphe précédent les coefficients de réflexion pour :

- l'intensité $\underline{\rho}_I = \frac{\underline{I}_r(x_0)}{\underline{I}_i(x_0)} = \frac{Z_c - \underline{Z}}{Z_c + \underline{Z}}$
- la tension $\underline{\rho}_V = \frac{\underline{V}_r(x_0)}{\underline{V}_i(x_0)} = \frac{-Z_c \underline{I}_r(x_0)}{Z_c \underline{I}_i(x_0)} = -\underline{\rho}_I$.