

3-M- Spectrométrie optique, couleur

Intro :

Au bureau, lampe blanche, prisme à vision directe et écran : le spectre de la lumière blanche : Présentation de l'historique du concept de décomposition de la lumière avec Isaac Newton.

I- Spectres et couleurs

Matériel : rétroprojecteur, feuille opaque avec une fente de 15cmx2cm posée sur la vitre du rétro, réseau posé sur la lentille du rétro, alternostat pour faire varier l'alimentation du rétro et donc la puissance de la lampe, bécher contenant une solution de permanganate de potassium.

1) Loi de Wien

On fait varier l'intensité du courant et on remarque que le spectre s'élargit vers le bleu-violet quand la lampe est plus chaude. Spectre continu d'origine thermique. Loi de Wien ($\lambda_{max} = \sigma T$), programme de 1ère S.
Conséquences : application en astrophysique pour étudier la température des étoiles.

2) Spectre d'absorption

On pose le bécher de solution de permanganate de potassium sur la moitié de la fente. On observe à l'écran la partie du spectre sans solution et avec solution :

- des couleurs ont disparu, bande noire = absorption = interaction lumière/matière. (2^{nde} et 1^{ère} S)
- La couleur de la solution est complémentaire de la couleur absorbée. (1^{ère} S, terminale S)
- (Loi de Beer Lambert avec plusieurs bécher en croix (horizontale : on fait varier la concentration et verticale la longueur de la cuve : la hauteur de liquide) $A = \log\left(\frac{I_0}{I}\right) = \epsilon l C$)

II- Spectroscopie à fente

A) Prisme à vision direct.

Matériel : lampes spectrales : vapeurs de sodium et vapeurs de mercure, condenseur, fente réglable, lentille convergente 15cm de focale, prisme à vision directe, écran.

1) Installation du dispositif

- On conjugue la fente et l'écran avec la lentille.
- On place le condenseur entre la lampe et la fente, le plus près de la fente.
- On sort la fente de son support sans modifier sa position, et on cherche la position de la lampe qui donne une image de l'ampoule de la lampe sur la lentille, par l'intermédiaire du condenseur. (Afin d'avoir le plus de lumière)
- On replace la fente sur son pied, puis on place le prisme entre la lentille et l'écran.

2) Exploitation

- Lorsqu'on excite une espèce chimique, elle émet de la lumière = interaction lumière/matière = Planck et quantum d'énergie.
 - On remarque que la lampe au sodium ne donne pas les mêmes raies que celle au mercure : les raies sont caractéristiques de l'élément chimique. Application en astrophysique pour étudier la composition de l'atmosphère des étoiles, car les raies absorbées ou émises se situent à la même longueur d'onde.
 - On remarque que la double raie jaune du sodium n'apparaît pas, il n'y en a qu'une seule. Idem pour la double raie jaune du mercure. Interprétation : mauvaise résolution du dispositif qui n'est pas capable de séparer deux raies trop proches. (montrer l'influence de la largeur de la fente)
- Avantage du dispositif : spectre lumineux

Inconvénients : Loi de Cauchy (avec le prisme) $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$

B) Goniomètre

Matériel : lampes spectrales mercure et hydrogène, goniomètre à réseau.

1) Réglage du goniomètre

- Réglage de la lunette : elle est constituée d'un oculaire (à régler à sa vue pour que le réticule soit net) et d'un objectif. Allumer la lumière à l'intérieur de la lunette, placer un miroir au bout de la lunette pour l'auto collimation, et régler l'objectif pour que le réticule et son image soient dans le même plan. (on bouge la tête latéralement, le réticule et son image restent équidistants). Eteindre la lumière dans la lunette.
- Placer la lunette face au collimateur, sans le réseau. Plaquer la lampe spectrale de mercure au collimateur. Ouvrir la fente assez large. Régler le collimateur pour que l'image de la fente soit dans le plan du réticule. Refermer la fente pour la rendre assez fine.
- Placer le réseau au centre du goniomètre.

2) Observation des raies du mercure

- On tourne la lunette vers la droite, on observe le spectre du mercure d'ordre 1, puis 2, puis 3. Après, les ordres s'intercalent (le rouge d'un ordre passe avant le violet d'un autre...)
- Idem vers la gauche, les spectres sont symétriques.
- On constate que le doublet jaune est bien visible. La résolution du goniomètre est suffisante.

Calcul de la résolution : $R = \lambda_{\text{moyen}} / \Delta\lambda$ (cette formule est donnée par définition)

Avec les valeurs du livre « sextant », je trouve 274, ce qui est cohérent, car sur ce type de goniomètre, R vaut environ 300.

Explication: il suffit de prendre les deux λ des 2 raies noté dans le livre : $\lambda_{\text{moyen}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ et $\Delta\lambda = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{2}$

En réalité ce qui limite le pouvoir de résolution c'est la largeur de la fente d'entrée, la diffraction. Plus la fente a est large $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$ moins il y a de dispersion et plus il ya de risque que les raie se chevauche ne respectant plus le critère de Rayleigh. Seulement si la fente est trop étroite on perd en luminosité. Il y a un compromis à trouver. Problème que l'on ne rencontre pas avec les interféromètres interférentiel.

3) Mesures des longueurs d'onde des raies bleue et rouge de l'hydrogène

On travaille au minimum de déviation, pour un ordre donné. Je choisis l'ordre 2 car les raies sont plus espacées et cela offre une meilleure précision. Pas l'ordre 3 car les raies se chevauchent.

- Minimum de déviation : on place tout d'abord le réseau perpendiculairement au collimateur. On tourne la lunette vers la droite, on cherche la raie bleue d'ordre 2. On tourne légèrement le réseau de façon à le ramener perpendiculairement à la lunette, on voit la raie qui avance, puis fait demi-tour : on est au minimum de déviation à l'endroit où elle fait demi-tour. On mesure l'angle qui marque la position de la lunette (α_1)
- On revient à l'ordre 0 (en face du collimateur) et on remet le réseau en incidence normale.
- Puis on recommence les mêmes opérations, mais vers la gauche pour trouver α_2 . (cet angle est négatif)

L'angle de déviation minimum, Dm vaut : $D_m = (\alpha_1 - \alpha_2) / 2$

Idem pour la raie rouge.

Incertitude : $u(D_m) = \sqrt{u(\alpha_1)^2 + u(\alpha_2)^2}$

4) Exploitation

a) Calcul des longueurs d'onde :

Au minimum de déviation : $2 \sin(D_{km}/2) = k \cdot \lambda / a$, J'en déduis λ_{rouge} et λ_{bleu} pour l'hydrogène et l'erreur relative.

Démonstration : (H prépa optique 2^{ème} année)

■ Calcul de D_m

Utilisons les notations des documents 11 ou 12 : la rotation du réseau revient à faire varier θ_i . La déviation, pour λ et p donnés, est une fonction de θ_i :

$$D = \theta_p - \theta_i \quad \frac{dD}{d\theta_i} = \frac{d\theta_p}{d\theta_i} - 1.$$

En dérivant la relation fondamentale (à ordre p constant, à longueur d'onde λ constante, et à pas a de réseau constant) :

$$\sin \theta_p = \sin \theta_i + p \frac{\lambda}{a}$$

$$\cos \theta_p \frac{d\theta_p}{d\theta_i} = \cos \theta_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sin \theta_p}{d\theta_i} = \cos \theta_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\sin \theta_p}{d\theta_p} \frac{d\theta_p}{d\theta_i} = \cos \theta_i$$

D passe donc par sa valeur minimale D_m si $\frac{dD}{d\theta_i} = 0$, soit si $\cos \theta_i = \cos \theta_p$.

La solution $\theta_p = \theta_i$ correspond à la déviation nulle, et n'est possible que pour l'ordre 0.

Il reste donc $\theta_p = -\theta_i$, soit $2 \sin \theta_i = -p \frac{\lambda}{a}$ avec $D_m = -2\theta_i$, d'où :

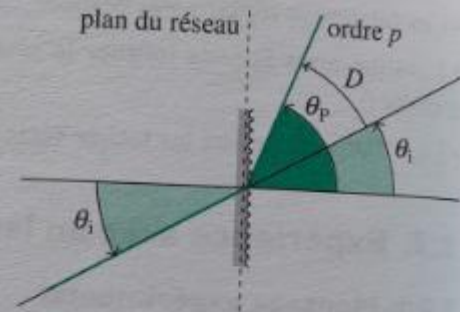
$$\sin(-\theta_i) = \sin \theta_i + p \frac{\lambda}{a}$$

$$-\sin(\theta_i) = \sin \theta_i + p \frac{\lambda}{a}$$

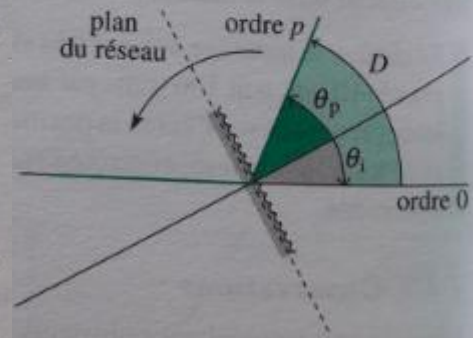
$$\boxed{2 \sin \frac{D_m}{2} = p \frac{\lambda}{a}}$$

Le plan du réseau est, dans ce cas (comme observé sur le document 12), bissecteur des rayons incidents et diffractés (doc. 14).

Le repérage de D_m peut être très précis ; il nous permettra de déterminer avec une excellente précision (connaissant λ) le nombre de traits par unité de longueur du réseau. L'application 4 nous permettra d'apprécier cette précision.



Doc. 11. Angle de déviation : $D = \theta_p - \theta_i$ (sur la figure : $\theta_p > 0$ et $\theta_i > 0$).



Doc. 12. Angle de déviation : $D = \theta_p - \theta_i$ (sur la figure : $\theta_p > 0$ et $\theta_i < 0$) ; D est voisin de D_m .

Incertitude :

$$2 \sin\left(\frac{D_m}{2}\right) = \frac{p \lambda}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{2a}{p} \sin\left(\frac{D_m}{2}\right)$$

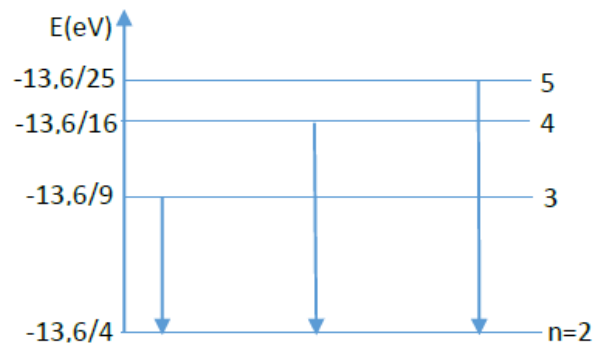
$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial D_m}\right)^2 u(D_m)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial a}\right)^2 u(a)^2}$$

← négligeable devant

$$u(\lambda) \approx \sqrt{\left(\frac{a}{p} \cos\left(\frac{D_m}{2}\right)\right)^2 u(D_m)^2}$$

b) Série de Balmer

Les raies visibles appartiennent à la série de Balmer ($n=2, 3, 4, 5$), mais à quelle transition appartient la raie rouge, idem pour la bleue ?



$$E_m - E_n = h \cdot \nu = h \cdot c / \lambda \quad \text{et} \quad E_n = -13,6/n^2 \quad \text{donc} \quad 1/m^2 = 1/4 - hc/(\lambda \times 13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19})$$

Pour la raie rouge ($\lambda=656\text{nm}$), on trouve $m = 3$, donc transition 3-2.

Pour la raie bleue ($\lambda=486\text{nm}$), on trouve $m = 4$, donc transition 4-2.

c) Constante de Rydberg R

En fait, $E_n = -R \cdot h \cdot C / n^2$ donc $1/\lambda = R \cdot (1/4 - 1/m^2)$ d'où $R = 1/[\lambda \cdot (1/4 - 1/m^2)]$
 (On doit trouver $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$)

III- Spectroscopie interférentielle (Manip à faire si on ne voit pas le doublet jaune de Na avec le goniomètre)
 (quantitatif)

- Interféromètre de Michelson en lame d'air.
 Mesure du doublet de Na (Sextant p 239 + J'intègre PC-PC* Sanz) en se servant de λ_m , mesuré avec le réseau et le goniomètre
- Interféromètre de Michelson en lame d'air.
 Mesure du doublet de Na (Sextant p 239 + J'intègre PC-PC* Sanz) en se servant de λ_m , mesuré avec le réseau.

Remarque Si on peut enregistrer les battements, il suffit de compter le nombre N d'oscillations dans un battement. $\frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda} = N\lambda_m$ d'où $\Delta\lambda = \frac{\lambda_m}{N}$.	Vous pouvez mesurer la translation du miroir entre plusieurs zones de brouillage (plus faciles à repérer), diviser par le nombre de battements (nombre de zones moins une) et obtenir le Δe correspondant à un battement. On peut en déduire la largeur du doublet du sodium connaissant la longueur d'onde moyenne $\lambda_{\text{moyen}} = 0,5893 \text{ }\mu\text{m}$. $\Delta\delta = 2\Delta e = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda}$ $\Delta\lambda = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{2\Delta e}$
--	--

Zone de brouillage	Position du verrier (mm)
1	15,75
2	16
3	16.27
4	16.56
5	16.84

Incertitude sur le verrier pour toutes les mesures : 0.02 mm
 Nous avons ici 4 intervalles de zone de brouillage

Comment se débrouiller avec les incertitudes ?

$$= \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{4} \quad e = \frac{V_5 - V_1}{4}$$

~~$e(V_5, V_1)$~~ dépend de 2 grandeurs qui ont chacune une incertitude de 0,02 mm.

$$\mu(e) = \sqrt{\left| \frac{\partial e}{\partial V_1} \right|^2 (\mu V_1)^2 + \left| \frac{\partial e}{\partial V_2} \right|^2 (\mu V_2)^2}$$

$$\mu(e) = \sqrt{\frac{(\mu V_1)^2}{(4)^2} + \frac{(\mu V_2)^2}{(4)^2}}$$

$$\mu(e) = \frac{1}{4} \sqrt{(\mu V_1)^2 + (\mu V_2)^2}$$

$$\mu(e) = \frac{1}{4} \sqrt{(0,02)^2 + (0,02)^2} = \frac{0,02\sqrt{2}}{4}$$

$$\mu(e) = 0,007 \text{ mm} = 0,007 \text{ mm.}$$

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{2e} = 0,64 \text{ nm.}$$

$$\lambda_{\text{moyen}} = 589,3 \text{ nm} \pm 0,2 \text{ nm}$$

$$e = 0,272 \pm 0,007 \text{ mm}$$

$$\mu \Delta \lambda = \sqrt{\left| \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \lambda_{\text{moyen}}} \right|^2 (\mu \lambda_{\text{moyen}})^2 + \left| \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial e} \right|^2 (\mu e)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\lambda_{\text{moyen}}}{e} \right)^2 (\mu \lambda_{\text{moyen}})^2 + \left(\frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{2e^2} \right)^2 (\mu e)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{589,3 \cdot 10^{-9}}{0,272 \cdot 10^{-3}} \right)^2 (0,2 \cdot 10^{-9})^2 + \left(\frac{(589,3 \cdot 10^{-9})^2}{2 \times (0,272 \cdot 10^{-3})^2} \right)^2 \times (0,007 \cdot 10^{-3})^2}$$

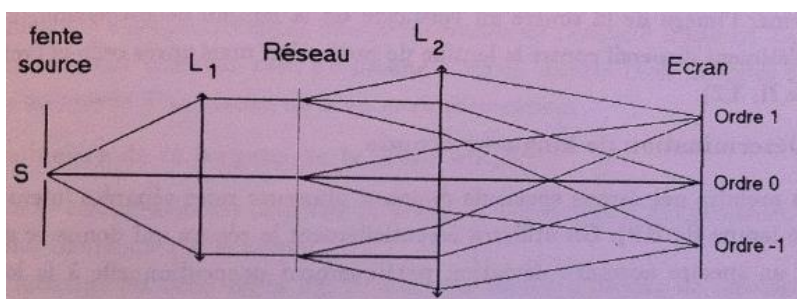
$$= 0,02 \text{ nm}$$

$$\boxed{\Delta \lambda = (0,64 \pm 0,02) \text{ nm}}$$

Conclusion : Caractérise la source *via* l'étude de la lumière. C'est donc plutôt cool, et surtout très utilisé, p.ex. en astrophysique.

Annexe : Courbe d'étalonnage

- Réseau : Projeter sur un écran (selon le principe du goniomètre)
 - courbe d'étalonnage (Hg) (**quantitatif**)



L'ensemble [fente-lentille L_1] constitue le collimateur. L'ensemble [lentille L_2 -écran] constitue une lunette d'observation. Ce montage est celui réalisé dans un spectroscope de laboratoire, dans un monochromateur ou lors de l'utilisation d'un goniomètre mais dans ces différents instruments, on ne projette pas le spectre : on l'observe à l'œil au moyen d'un oculaire ou avec un détecteur.

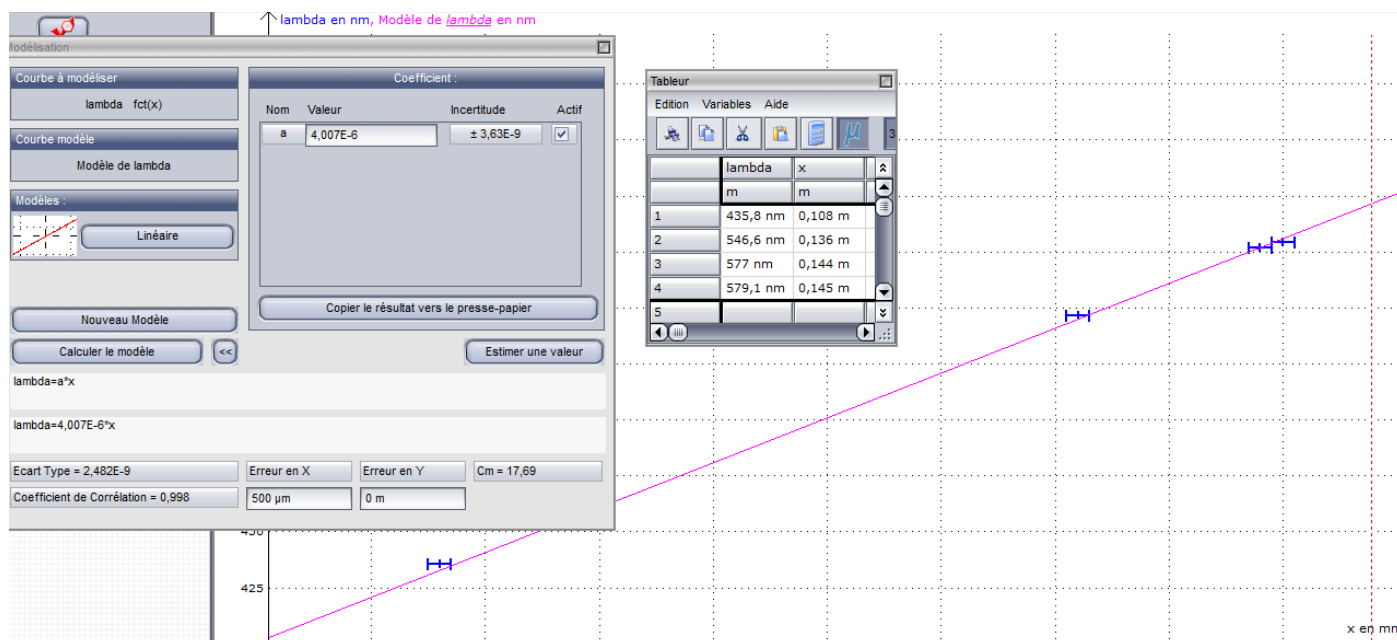
Dans une expérience de démonstration, on projette le spectre sur un écran. Si l'on veut obtenir un spectre suffisamment étalé, il faut utiliser une lentille L_2 de grande focale (par exemple 2 mètres).

La manipulation a été réalisée avec :

f1= 25.5cm

f2=79.8 cm

Largeur de la fente : 0.025 mm



On remplace la lampe à vapeur de mercure par la lampe à vapeur de sodium et on trouve λ_m du sodium car non le doublet du sodium n'est pas résolu.

On va se servir du λ_m du sodium pour la manipulation suivante avec l'interféromètre de Michelson

II- Spectroscopie interférentielle (quantitatif)

- Interféromètre de Michelson en lame d'air.
Mesure du doublet de Na (Sextant p 239 + J'intègre PC-PC* Sanz) en se servant de λ_m , mesuré avec le réseau.

Remarque Si on peut enregistrer les battements, il suffit de compter le nombre N d'oscillations dans un battement. $\frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda} = N\lambda_m$ d'où $\Delta\lambda = \frac{\lambda_m}{N}$.	Vous pouvez mesurer la translation du miroir entre plusieurs zones de brouillage (plus faciles à repérer), diviser par le nombre de battements (nombre de zones moins une) et obtenir le Δe correspondant à un battement. On peut en déduire la largeur du doublet du sodium connaissant la longueur d'onde moyenne $\lambda_{\text{moyen}} = 0,589\,3\,\mu\text{m}$. $\Delta\delta = 2\Delta e = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda}$ $\Delta\lambda = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{2\Delta e}$
Zone de brouillage	Position du verrier (mm)
1	15,75
2	16
3	16.27
4	16.56
5	16.84

Incertitude sur le verrier pour toutes les mesures : 0.02 mm
 Nous avons ici 4 intervalles de zone de brouillage

Comment se débrouiller avec les incertitudes ?

$$= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \quad e = \frac{V_5 - V_1}{4}$$

$e(V_5; V_1)$ dépend de 2 grandeurs qui ont chacune une incertitude de 0,02 mm.

$$\mu(e) = \sqrt{\left| \frac{\partial e}{\partial V_1} \right|^2 (\mu V_1)^2 + \left| \frac{\partial e}{\partial V_2} \right|^2 (\mu V_2)^2}$$

$$\mu(e) = \sqrt{\frac{(\mu V_1)^2}{(4)^2} + \frac{(\mu V_2)^2}{(4)^2}}$$

$$\mu(e) = \frac{1}{4} \sqrt{(\mu V_1)^2 + (\mu V_2)^2}$$

$$\mu(e) = \frac{1}{4} \sqrt{(0,02)^2 + (0,02)^2} = \frac{0,02\sqrt{2}}{4}$$

$$\mu(e) = 0,007 \text{ mm} = 0,007 \text{ mm}.$$

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{2e} = 0,64 \text{ mm}.$$

$$\lambda_{\text{moyen}} = 589,3 \text{ nm} \pm 0,2 \text{ nm}$$

$$e = 0,272 \pm 0,007 \text{ mm}$$

$$\mu \Delta \lambda = \sqrt{\left| \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \lambda_{\text{moyen}}} \right|^2 (\mu \lambda_{\text{moyen}})^2 + \left| \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial e} \right|^2 (\mu e)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\lambda_{\text{moyen}}}{e} \right)^2 (\mu \lambda_{\text{moyen}})^2 + \left(\frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{2e^2} \right)^2 (\mu e)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{589,3 \cdot 10^{-9}}{0,272 \cdot 10^{-3}} \right)^2 (0,2 \cdot 10^{-9})^2 + \left(\frac{(589,3 \cdot 10^{-9})^2}{2 \times (0,272 \cdot 10^{-3})^2} \right)^2 (0,007 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$= 0,02 \text{ nm}$$

$$\boxed{\Delta \lambda = (0,64 \pm 0,02) \text{ nm}}$$

Question :

Annexe

MP09 : Spectrométrie optique.

| Bibliographie

[46] *Expériences d'optique à l'agrégation*, R. Duffait

[136] *Optique expérimentale*, Sextant

| Idées à illustrer

Principe de la spectrométrie : séparation du rayonnement en ses longueurs d'ondes

Problématique de la résolution du spectromètre

| Plan

Introduction

Reprendre celle du Sextant. Plan du montage : du moins précis au plus précis.

1. Spectrométrie à Prisme : Pouvoir de résolution du prisme

Manip : mesurer son pouvoir de résolution (puis le faire avec le réseau et s'apercevoir qu'il est moins bien) et du coup faire le doublet du sodium

2. Spectrométrie à réseau

[136] , **Manip** : discuter la résolution du réseau. Influence de la fente source, du nombre de traits éclairés, du pas du réseau, de l'ordre (changer de réseau, ouvrir la fente, . . .).

, **Manip** : étalonnage : lampe Hg-Cd (valeurs à prendre dans [46]). Interpolation linéaire, discuter la validité de l'approximation.

, **Manip** : application au spectre du sodium, mesurer le λ du doublet, qu'on peut parfois séparer avec un bon réseau.

3. Spectrométrie interférentielle

, **Manip** : Michelson en lame d'air, lampe au sodium dont on veut séparer le doublet. Utilisation du moteur. Utiliser Caliens en mode Michelson. En cas de caprice du moteur, on peut toujours le faire à la main (mais c'est moins bien).

Discuter la résolution de la TF en fonction du temps d'acquisition. Avantage par rapport au réseau : on obtient la forme du spectre avec autant de précision que l'on veut, dans le principe il suffit d'être patient.

Parler du pouvoir de résolution ?

Conclusion

Caractérise la source *via* l'étude de la lumière. C'est donc plutôt cool, et surtout très utilisé, p.ex. en astro.

| Remarques

. Si on déplace le réseau sans faire exprès, on gagnera un ticket gratuit pour le re-étalonner.

. Le montage est orienté métrologie : il importe de bien discuter des incertitudes et de la précision des différents spectromètres.



3 Première modélisation : cas d'un doublet de raies infiniment fines

On suppose que la source contient deux raies très proches et infiniment fines σ_1 et σ_2 de même intensité I_0 . Chaque raie donne son propre système d'interférences car les deux raies sont incohérentes entre elles. Il suffit donc de sommer les intensités. Avant de faire le calcul, on peut prévoir qualitativement que l'interfrange dépendant de la longueur d'onde, les deux systèmes d'interférences seront décalés d'une grandeur variable donc les deux systèmes pourront dans certaines zones se renforcer ou dans d'autres zones se brouiller.

3.1. Expression de l'intensité au point M

Pour le point M appartenant au champ d'interférences, $I(M) = I_1(M) + I_2(M)$ avec $I_1(M) = 2I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_1\delta_{2/1}(M))$

et $I_2(M) = 2I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_2\delta_{2/1}(M))$

$$I(M) = 2I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_1\delta_{2/1}(M)) + 2I_0(1 + \cos 2\pi\sigma_2\delta_{2/1}(M))$$

$$I(M) = 2I_0(2 + \cos(2\pi\sigma_1\delta_{2/1}(M)) + \cos(2\pi\sigma_2\delta_{2/1}(M))).$$

Transformons la somme des cosinus en produit : $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.

$$I(M) = 2I_0(2 + 2 \cos \pi(\sigma_1 + \sigma_2)\delta_{2/1}(M) \cos \pi(\sigma_1 - \sigma_2)\delta_{2/1}(M)).$$

Comme il s'agit d'un doublet de raies, notons $\sigma_{\text{moyen}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ et

$$\Delta\sigma = |\sigma_1 - \sigma_2| \ll \sigma_{\text{moyen}}.$$

Notons $\delta = \delta_{2/1}(M)$ pour alléger.

$$I(M) = 4I_0[1 + \cos(2\pi\sigma_{\text{moyen}}\delta) \cos(\pi\Delta\sigma\delta)]$$

On note la présence du terme habituel d'interférences $\cos 2\pi\sigma_{\text{moyen}}\delta$ multiplié par un nouveau terme $\cos \pi\Delta\sigma\delta$.

3.2. Étude de l'intensité en fonction de δ

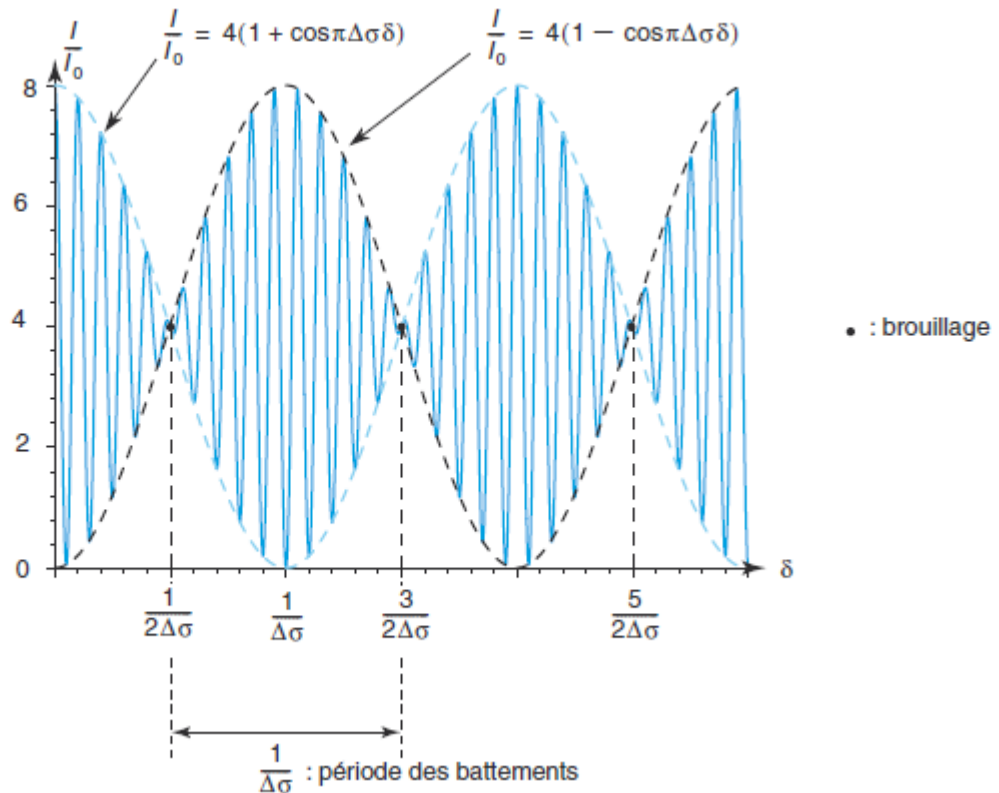
Cette étude est simplifiée par la remarque suivante : la période en δ du premier cosinus est $\frac{1}{\sigma_{\text{moyen}}}$ (on écrit $2\pi\sigma_{\text{moyen}}\delta = 2\pi$) et la période en δ du second cosinus est $\frac{2}{\Delta\sigma}$ (on écrit $\pi\Delta\sigma\delta = 2\pi$). Comme $\Delta\sigma \ll \sigma_{\text{moyen}}$ alors $\frac{1}{\sigma_{\text{moyen}}} \ll \frac{1}{\Delta\sigma}$.

Le produit des deux cosinus est donc le produit d'un terme à variation rapide par un terme à variation lente. Si on étudie la fonction localement autour d'un point M de chemin optique δ , le terme à variation rapide varie entre ± 1 et le terme à variation lente vaut $\cos \pi\Delta\sigma\delta$.

Si l'on trace les deux courbes $I(\delta) = 4I_0(1 + \cos \pi\Delta\sigma\delta)$ et $I(\delta) = 4I_0(1 - \cos \pi\Delta\sigma\delta)$, le signal $I(\delta)$ oscille rapidement entre ces deux courbes. On parle de **battements optiques** car il s'agit du même signal que pour des battements acoustiques ou électriques : phénomène typique de l'addition de deux signaux d'amplitude voisine et de fréquences très voisines ($\Delta f \ll f_{\text{moyen}}$).

Remarque

En modulation d'amplitude, le signal rapide est la porteuse et le signal lent la modulation. Le signal lent module l'amplitude de la porteuse.



On remarque sur la figure 3 que la période des battements est $\frac{1}{\Delta\sigma}$, deux fois plus petite que la période du signal lent.

$$I_{\max}(\delta) = 4I_0(1 + |\cos \pi \Delta\sigma \delta|)$$

$$I_{\min}(\delta) = 4I_0(1 - |\cos \pi \Delta\sigma \delta|)$$

Attention
Le contraste ne s'annule que si les deux signaux additionnés ont même amplitude. Les deux signaux sont les intensités $I_1(M)$ et $I_2(M)$ d'amplitude commune $2I_0$.

Le contraste vaut $C(\delta) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\cos \pi \Delta\sigma \delta|$. Il s'annule périodiquement pour $\delta = \frac{1}{2\Delta\sigma} + \frac{k}{\Delta\sigma}$ avec k entier. Quand le contraste s'annule, il y a brouillage des franges d'interférences tandis que $C = 1$ correspond à un renforcement des franges ainsi plus contrastées ($\delta = \frac{k}{\Delta\sigma}$).

3.3. Analyse qualitative

Retrouvons sans exprimer l'intensité la période des battements optiques.

Nous allons utiliser l'ordre d'interférences au point M . Pour la raie 1, $p_1(M) = \frac{\delta}{\lambda_1}$ et pour la raie 2, $p_2(M) = \frac{\delta}{\lambda_2}$. Quand les deux systèmes d'interférences se renforcent au point M , les franges brillantes de l'un coïncident avec les franges brillantes de l'autre au point M et les franges sombres de l'un coïncident avec les franges sombres de l'autre.

On peut donc écrire $p_1(M) = p_2(M) + k$ avec k entier ce qui donne :

$$\delta = p_1\lambda_1 = p_2\lambda_2 = (p_2 + k)\lambda_1 \text{ d'où } p_2 = \frac{k\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \text{ et finalement } \delta(M) = \frac{k\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \text{ avec } k \text{ entier.}$$

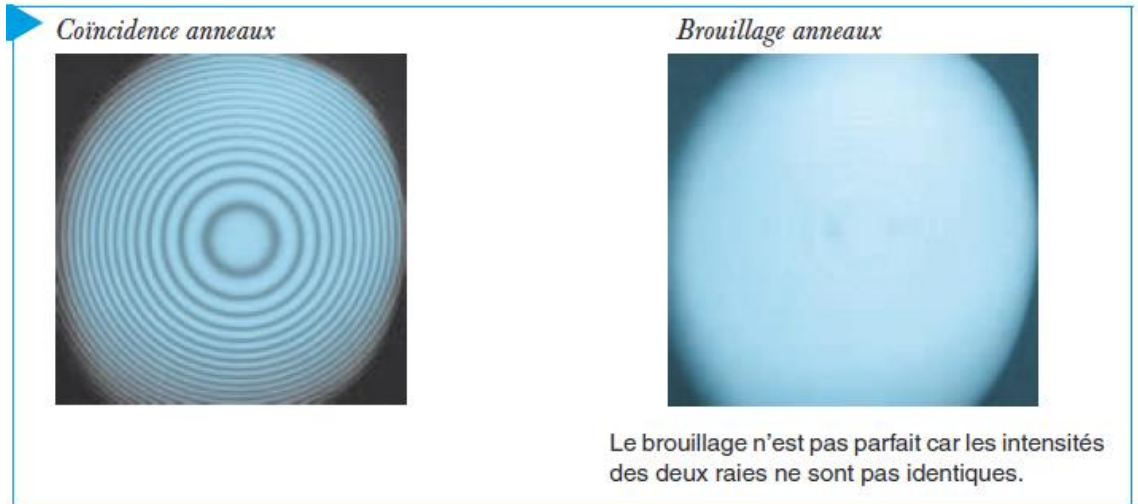
On fait ainsi apparaître une période en δ : $\frac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_2 - \lambda_1|} = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda}$. Cette période est appelée période des coïncidences ou période des brouillages.

Or $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma}$ donc on retrouve bien la période des battements :

$$\frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda} = \lambda_{\text{moyen}} \frac{\lambda_{\text{moyen}}}{\Delta\lambda} = \lambda_{\text{moyen}} \frac{\sigma_{\text{moyen}}}{\Delta\sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma}.$$

3.4. Résultats expérimentaux

En TP, vous observerez les battements optiques avec le Michelson comme diviseur d'onde (en lame d'air à faces parallèles) et avec la lampe à vapeur de sodium comme source. Si vous ne disposez pas d'un très bon filtre dans le jaune pour ne sélectionner que le doublet, vous pouvez tout de même repérer à l'œil nu les zones de brouillage et de renforcement (figure 4).



Remarque

Si on peut enregistrer les battements, il suffit de compter le nombre N d'oscillations dans un battement.

$$\frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda} = N\lambda_m$$

$$\text{d'où } \Delta\lambda = \frac{\lambda_m}{N}.$$

Vous pouvez mesurer la translation du miroir entre plusieurs zones de brouillage (plus faciles à repérer), diviser par le nombre de battements (nombre de zones moins une) et obtenir le Δe correspondant à un battement. On peut en déduire la largeur du doublet du sodium connaissant la longueur d'onde moyenne $\lambda_{\text{moyen}} = 0,589\,3\,\mu\text{m}$.

$$\Delta\delta = 2\Delta e = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{\Delta\lambda}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_{\text{moyen}}^2}{2\Delta e}$$