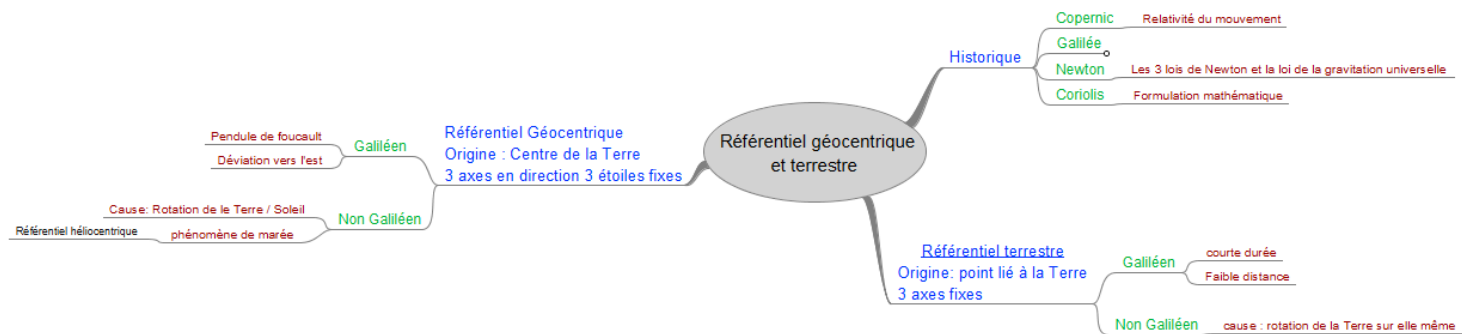


29e-Référentiels géocentrique et terrestre

Intro : Carte Mentale



Partie Péda dan

Démarche d'investigation:

Post Bac :

1) Définition d'un référentiel Galiléen avec le principe d'inertie

2) Notion de Poids : (Ref : Terrestre en rotation circulaire / Ref géocentrique Galiléen) (PC-PC* :Saenz)

3) Etude des marées : (Ré : Géocentrique en translation circulaire (e=0.017) / Réf géocentrique)(1000 et 1 questions)

Un référentiel : Un point d'un solide indéformable et 3 axes fixes (avec 3 points non alignés)

1. A la recherche d'un référentiel Galiléen

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique :

Remarque : Le principe d'inertie postule l'existence de R Galiléen dans lequel on peut appliquer le PFD

On étudie un solide de masse m assimilé à un point matériel dans le référentiel terrestre (origine : le sol, et 3 axes perpendiculaire orienté vers des étoiles fixes. Seulement ce référentiel n'est plus considéré comme galiléen puisqu'il est en rotation uniforme autour du référentiel géocentrique, qui lui est considéré comme galiléen.

2. Application : champs de pesanteur g . (montrer qu'il n'est pas uniforme)

Les équations de changement de référentiel sont connues (établies à partir de la relation de Chales)

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M)$$

Donner au tableau les expressions générale de $\vec{a}_c(M) = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/R'}(M)$ et $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overline{HM}$

Sachant que $\vec{a}_e(M)$ est l'accélération du point coïncidant (immobile dans R)

Pour définir le poids d'un corps, on imagine celui-ci accroché à un fil.

Référentiel galiléen = référentiel géocentrique.

système : objet de masse m (constante) et immobile dans R' (Référentiel terrestre)

Bilan des forces :

- Force d'attraction gravitationnel : $\vec{A}_T = m \vec{G}_T(P)$ avec $\vec{G}_T(P) = -G \frac{M_T}{R_T^2} \vec{e}_{z'}$ le champs gravitationnel créé par la Terre au point P où se situe le solide.
- la tension du fil : $\vec{T} = T \vec{e}_{z'}$

Dans le référentiel galiléen l'application du PFD nous dit

$$m \vec{a}_{/R}(P) = \vec{A}_T + \vec{T}$$

$$m(\vec{a}_{/R'}(P) + \vec{a}_c(P) + \vec{a}_e(P) = \vec{A}_T + \vec{T}$$

$$m(\vec{a}_{/R'}(P) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/R'}(P) + -\omega^2 \vec{HM}) = \vec{A}_T + \vec{T}$$

Dans le référentiel terrestre

$$m \vec{a}_{/R'}(P) = \vec{A}_T + \vec{T} - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/R'}(P) + m\omega^2 \vec{HM}$$

Avec $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(P) = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/R'}(P)$ la force d'inertie de Coriolis

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(P) = m\omega^2 \vec{HM}$ la force d'inertie d'entraînement

$$m \vec{a}_{/R'}(P) = \vec{A}_T + \vec{T} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ie}$$

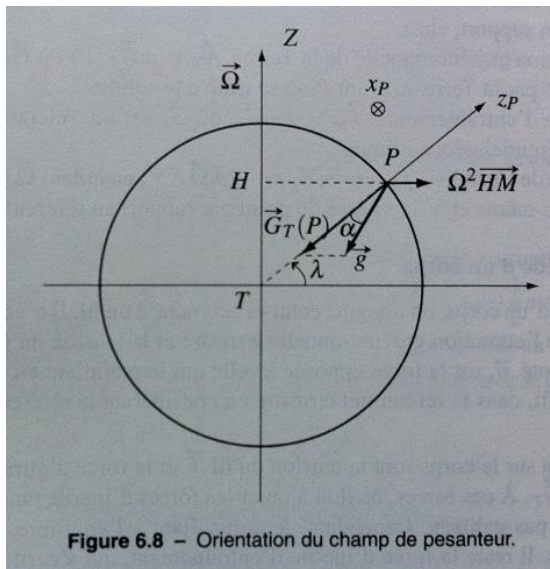
Dans notre cas l'objet d'étude est immobile dans R' donc $\vec{a}_{/R'}(P) = \vec{F}_{ic} = \vec{0}$

$$\text{D'où } \vec{p} = -\vec{T} = \vec{A}_T + \vec{F}_{ie}$$

Par définition le poids $\vec{p}$ est la force opposé à celle qui le maintient à l'équilibre donc $\vec{p} = -\vec{T}$

$$\vec{p} = m\vec{g} = \vec{A}_T + \vec{F}_{ie} = m(\vec{G}_T(P) + \omega^2 \vec{HM})$$

Le champs de pesanteur $\vec{g}(P) = \vec{G}_T(P) + \omega^2 \vec{HM}$ est la somme du champs de gravitation $\vec{G}_T(P)$ et d'un terme centrifuge (car dirigé vers l'extérieur et on dit centripète dans le cas contraire)



Le champ de pesanteur n'est pas dirigé selon la verticale du lieu, repéré par la direction de la droite TP

Mais l'angle d'inclinaison du champ de pesanteur par rapport à la verticale est très faible ce qui permet de considérer en première approximation que le champ de pesanteur est dirigé vers le centre de la Terre (Voir démo en annexe)

Quel est l'influence de la latitude ?

Le terme centrifuge est égale à :

$$\omega^2 HM = \omega^2 R_T \cos \lambda$$

- Il est donc nul aux pôles ($\cos \lambda = 0$) et dans ce cas c'est là où l'intensité de la pesanteur est la plus grande.
- Il est maximum à l'équateur et donc c'est de là qu'on envoie les fusées dans l'espace car c'est plus facile au cause d'un poids plus faible des objets.

Conclusion :

Dans le pendule de Foucault on a considéré le référentiel géocentrique comme Galiléen mais ce n'est pas le cas si on étudie les bourrelets océaniques (phénomène de marée), c'est le référentiel héliocentrique qu'on va considérer comme Galiléen

Questions :

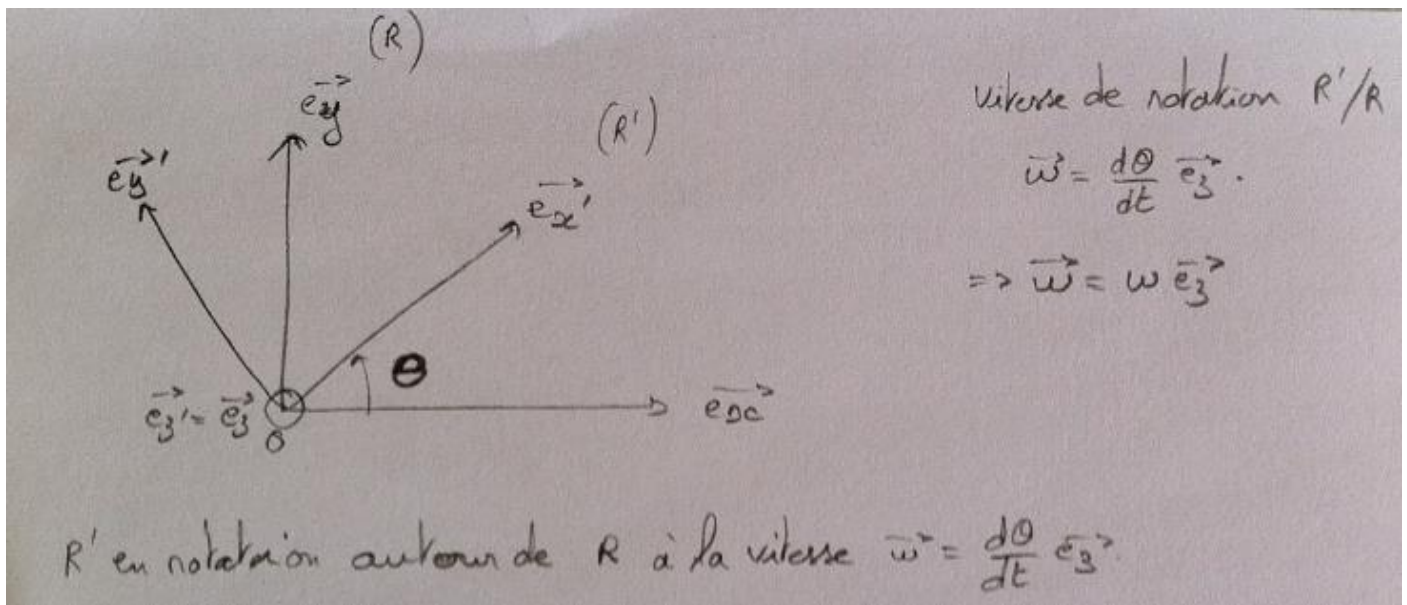
- L'axe de rotation de la Terre est-il fixe ? non, elle a un mouvement de précession (un cône d'angle $23,5^\circ$ en faisant une révolution complète en 25 800 ans.) Du à un effet gyroscopique. Il faut comparer la Terre à une toupie.

- Dans un train qui accélère si on lâche un ballon de baudruche que fait-il ? Il avance avec le train à cause de la poussée d'Archimède. L'air étant compressible la pression à l'arrière du wagon va être supérieure à celle à l'avant.

Annexe : Changement de référentiel

3. Démontrer les formules de changement de référentiel.

Afin de simplifier les calculs et ainsi gagner du temps on va considérer le cas où le référentiel $R' (O', x', y', z')$ est en rotation uniforme autour de $R (O, x, y, z)$ avec $O=O'$ et $\vec{e}_z = \vec{e}_{z'}$



$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad \text{dans } R \text{ (galiléen)}$$

$$\vec{O'M} = x' \vec{e}_{x'} + y' \vec{e}_{y'} + z' \vec{e}_{z'} \quad \text{dans } R'$$

On calcule la vitesse du point M dans le référentiel R sachant que les points O et O' sont confondus

$$\vec{v}_{/R}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'} + \vec{O'M}}{dt} = \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

$$\vec{v}_{/R}(M) = \dot{x}' \vec{e}_{x'} + \dot{y}' \vec{e}_{y'} + \dot{z}' \vec{e}_{z'} + x' \frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}$$

le vecteur $\vec{e}_{z'}$ est immobile donc $\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} = 0$

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + x' \frac{d\vec{e}_x'}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + y' \frac{d\vec{e}_y'}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

La dérivé du vecteur $\vec{e}_x'$ par l'angle θ est égale à une rotation de 90° ce qui nous donne :

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R'}(M) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

avec la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$ qui correspond à la vitesse qu'aurait le point M si ce dernier était fixe dans R' (c'est le cas de O')

On cherche l'expression de l'accélération du point M dans R

$$\vec{a}_{/R}(M) = \frac{d\vec{v}_{/R}(M)}{dt} = \frac{d\vec{v}_{/R'}(M)}{dt} + \frac{d\vec{v}_e(M)}{dt}$$

$$\vec{a}_{/R}(M) = \ddot{x}' \vec{e}_x' + \ddot{y}' \vec{e}_y' + \ddot{z}' \vec{e}_z' + 2\dot{x}' \frac{d\vec{e}_x'}{dt} + 2\dot{y}' \frac{d\vec{e}_y'}{dt} + x' \frac{d^2\vec{e}_x'}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{e}_y'}{dt^2}$$

avec

- $\vec{a}_{/R'}(M) = \ddot{x}' \vec{e}_x' + \ddot{y}' \vec{e}_y' + \ddot{z}' \vec{e}_z'$
- $\vec{a}_c(M) = 2\dot{x}' \frac{d\vec{e}_x'}{dt} + 2\dot{y}' \frac{d\vec{e}_y'}{dt} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/R'}(M)$:
l'accélération de Coriolis (accélération complémentaire qui dépend de la **vitesse** du point M)
- $\vec{a}_e(M) = x' \frac{d^2\vec{e}_x'}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{e}_y'}{dt^2} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$
(accélération d'entraînement qui dépend de la **position** du point M et avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation Oz)

Soit :

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/R'}(M) + -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$$\vec{a}_{/R}(M) = \vec{a}_{/R'}(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M)$$

Annexe :Pendule de Foucault

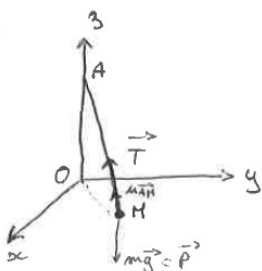
(H prépa PCSI mécanique page 215 :erreurs dans le livre)

(Référentiel terrestre en rotation autour du référentiel géocentrique)

Pré-requis : Avoir fait le cours sur les changements de référentiel : $\vec{a}(M)_{/R_g} = a(M)_{/R_T} + a_e(H) + a_c(H)$

- Savoir que $\vec{g} = \vec{G}_T(H) + \omega_T^2 \overrightarrow{HM}$ (démon avec m au bout d'un fil immobile). prendre en compte $a_e(H)$.
- Avoir fait le pendule simple $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

Pendule de Foucault : Etude des petites oscillations du pendule de longueur l et de masse m .



Approximation : oscillation seulement dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y}) \Rightarrow \ddot{z} \approx 0$ et $\dot{z} \approx 0$

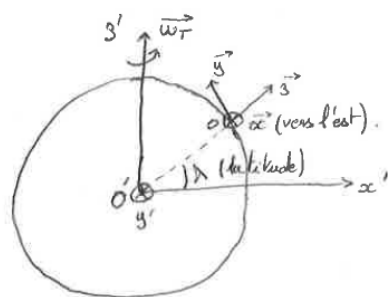
$$\text{avec } \vec{T} = T \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} = T \frac{\vec{AH}}{\|\vec{AH}\|} = -T \frac{\vec{AH}}{l} \quad \text{or } \vec{AH} \Big|_{\vec{y}} \Big|_{\vec{z}} \approx 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_x \approx -T \frac{x}{l} \\ T_y \approx -T \frac{y}{l} \end{cases} \quad (3 \ll l) \quad T_z = -T \frac{3-l}{l} \approx mg \approx T$$

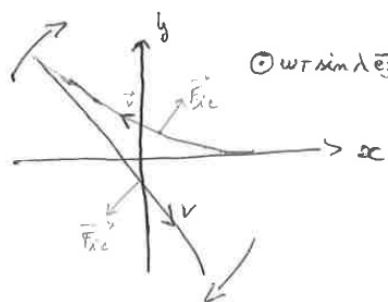
On applique le PFD au référentiel géocentrique (considéré comme Galiléen). $\sum \vec{F} = m \vec{a}^{(H)}_{/R_g}$

Soit $m \vec{a}^{(H)}_{/R_T} = \vec{T} + m \vec{g} - m \vec{a}_c$ or $\vec{a}_c = 2 \vec{\omega}_T \wedge \vec{v}^{(H)}_{/R_T}$

C'est là qu'il faut justifier la forme de $\vec{a}_c$ en disant que le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique.



D'où $m \vec{a}^{(H)}_{/R_T} = m \vec{g} + \vec{T} - 2m \vec{\omega}_T \wedge \vec{v}^{(H)}_{/R_T}$
Le terme de Coriolis va être dérivé.



$-2\omega_T \sin \lambda \vec{e}_3$



On projette $\vec{\omega}_T$ sur $\vec{e}_3$

$\Rightarrow \vec{\omega}_T \cdot \vec{e}_3 = \omega_T \cos(\frac{\pi}{2} - \lambda) = \omega_T \sin \lambda$

On projette $\vec{\omega}_T$ sur $\vec{e}_y$: $\vec{\omega}_T \cdot \vec{e}_y = \omega_T \cos \lambda$

Donc $\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}^{(H)}_{/R_T} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_T \cos \lambda \\ \omega_T \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_T (\cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{y}) \\ \omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ -\omega_T \cos \lambda \dot{x} \end{pmatrix}$

Dans le repère $(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = T_x + 2m\omega_T (\sin \lambda \dot{y} - \cos \lambda \dot{z}) \\ m \ddot{y} = T_y - 2m\omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ m \ddot{z} = T_z - mg + 2m\omega_T \cos \lambda \dot{x} \end{cases}$$

$\dot{z} = 0$ l'altitude

On a fait des approximations : nur dans le plan $(0, x, y)$
 $\dot{z} = 0$ et $\dot{z} = 0$

Soit $\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega_T \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\omega_T \sin \lambda \dot{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega_T \sin \lambda \dot{y} \quad (1) \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\omega_T \sin \lambda \dot{x} \quad (2) \end{cases}$
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ On résout l'équation du pendule simple

Pour résoudre ces équations on pose $\mu = x + iy$ et on obtient $(3) = (1) + i(2)$

$\Rightarrow \textcircled{3} \quad \ddot{\mu} - i2\omega_T \sin \lambda \dot{\mu} + \omega_0^2 \mu = 0$

Démo $\ddot{x} + i\ddot{y} - i2\omega_T \sin \lambda \dot{x} + 2\omega_T \sin \lambda \dot{y} + \omega_0^2 x + i\omega_0^2 y = 0$

et on retrouve $\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\omega_T \sin \lambda \dot{y} = 0 \quad (1) \\ i(\dot{y} + \omega_0^2 y + 2\omega_T \sin \lambda \dot{x}) = 0 \quad (2) \end{cases}$

$i(\dot{y} + \omega_0^2 y + 2\omega_T \sin \lambda \dot{x}) = 0 \quad (2)$

! le livre fait une erreur il oublie 2.

Equation différentielle du 2^{ème} ordre pour laquelle l'équation caractéristique

$n^2 + i2\omega_T \sin \lambda n + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = i^2 4(\omega_T \sin \lambda)^2 - 4\omega_0^2 = -4(\omega_T^2 \sin^2 \lambda + \omega_0^2)$

$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

On peut donc écrire $\eta \approx -i\omega_T \sin \lambda \pm i\omega_0$

Le mouvement correspond donc à $u = (A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega_T \sin \lambda t}$

$$\Rightarrow u = A \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-i\omega_T \sin \lambda t}$$

Les conditions initiales vont nous permettre de trouver A et φ

à $t=0$: $u = x_0 = A \cos \varphi$ et $\dot{x} = 0 = (-A\omega_0 \sin(\varphi) + A \cos \varphi (-i\omega_T \sin \lambda)) \approx -A\omega_0 \sin(\varphi)$
 or $\omega_T \ll \omega_0 \Rightarrow \varphi = 0$

D'où $\boxed{u \approx x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega_T \sin \lambda t}}$ or $u = x + iy$

$$\Rightarrow x(t) \approx x_0 \cos(\omega_0 t) [\cos(\omega_T \sin \lambda t)]$$

$$y(t) \approx x_0 \cos(\omega_0 t) [-\sin(\omega_T \sin \lambda t)]$$

traduit la notation périodique du plan d'oscillation à la pulsation $(\omega_T \sin \lambda)$

Soit $T_{\text{notation}} = \frac{2\pi}{\omega_T \sin \lambda} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{24 \times 3600} \times \sin\left(\frac{45 \times 2\pi}{360}\right)} = 122188 \text{ s} = 33,9 \text{ heures}$ pb pas la même chose que le livre.
 à Paris ($\lambda \approx 45^\circ$)
 48,51' 60' 10"
 ↑ Sur "j'intègre PCSI" p 1413
 115000 s = 31 h 52 min

On remarque d'après cette dernière équation (T rotation du plan d'oscillation) qu'aux pôles cette période vaut 24 heures et qu'elle est nulle à l'équateur.

Force de Coriolis responsable aussi de la déviation vers l'Est. Lors de la chute d'objet