

22-L- Ondes stationnaires

Intro : Carte Mentale

Une des solutions de l'équation de d'Alembert (équation de propagation des ondes)

Superposition de 2 ondes progressive monochromatique donnent une onde stationnaire (Composante spatiale séparée de la composante temporelle)

Post Bac – Ondes acoustique dans les fluides :

Bibliographie :

- J'intègre PC-PC* (Dunod) M-N- Sanz (page 853)
- J'intègre PCSI* (Dunod) M-N- Sanz
- H-prépa Ondes MP-PC-PCSI

3. Ondes stationnaires

3.1. Corde de Melde

[132], **Manip** : oscillations forcées sur la corde de Melde. Constater expérimentalement le découplage entre espace et temps. Poser l'onde stationnaire. Montrer qu'une onde stationnaire est la somme de deux OPPS (trigo du cosinus).

3.2. Modes énergétiques

[70] Calculer l'énergie des modes. Montrer que l'énergie totale se répartit entre les modes.

3.3. Oscillations forcées et résonance

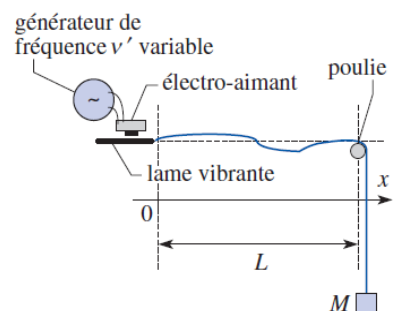
[132] Il existe une résonance aux fréquences propres

1. La corde de Melde

C'est une méthode très visible pour obtenir des ondes stationnaires

Description du dispositif : Une corde est tendue entre deux extrémités (*doc. 6*) :

- la première est constituée par une lame vibrante, soumise à un électro-aimant excitateur, qui effectue de petites oscillations verticales à la fréquence ν
- la seconde est constituée par une poulie sur laquelle la corde, enroulée, est tendue par le poids d'une masse M ajustable. La tension de la corde est alors égale à Mg

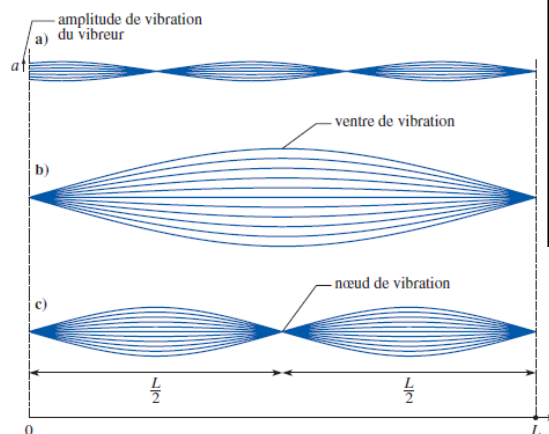


Doc. 6. Excitation de la corde de Melde. Avec ce dispositif, la corde est excitée à la fréquence $\nu = 2\nu'$ (présence de l'électro-aimant).

(on se place à une fréquence quelconque ou on a plein de nœud et ventre (a))

Nous pouvons observer que ces oscillations se font sur place et ne se propagent pas : nous dirons que la corde est le siège d'**ondes stationnaires**

On peut constater expérimentalement le découplage entre l'espace et le temps. C'est-à-dire la corde effectue des oscillations $s(x, t)$ dont l'amplitude F ne dépend que de la position x (et non de t)



Ce fuseau est la superposition, due à la persistance rétinienne, des différentes formes de la corde au cours du temps

◀ **Doc. 7.** Corde de Melde excitée par une fréquence variable à tension et longueur constantes.

a. Fréquence quelconque.

b. Première résonance.

c. Deuxième résonance.

L'échelle verticale de a. est beaucoup plus dilatée que pour b. et c.

Mathématiquement : $s(x, t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi)$

La dépendance explicite en $(x - ct)$ ou $(x + ct)$ n'existant plus, il n'y a pas propagation : $s(x, t)$ représente une onde stationnaire.

Pourquoi a-t-on une onde stationnaire sur la corde ?

Le vibreur envoie dans la corde une onde progressive ($s_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$) qui se propage en direction de la poulie.

Cette onde se réfléchit sur l'extrémité de la corde en contact avec la poulie, ce qui donne naissance à une deuxième onde se propageant en sens inverse $s_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. L'onde stationnaire le long de la corde résulte de la superposition de ces ondes progressives se propageant dans les deux sens.

preuve : $s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1) + A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$

formule trigo : $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$, rappel : $\cos(x) = \cos(-x)$

$$s(x, t) = 2A \left(\cos \left(\omega t + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \right) \right) \left(\cos \left(kx + \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \right) \right)$$

$$s(x, t) = 2A(\cos(\omega t + \varphi))(\cos(kx + \psi))$$

On obtient bien la forme d'une onde stationnaire avec $k = \frac{\omega}{c}$

De plus en première approximation (car on néglige les effets de l'air + d'autres choses pour pouvoir trouver l'équation) la propagation des ondes est donnée par l'équation d'Alembert.

$$\Delta s(x, t) - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta s(x, t) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c_s = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Dont l'une des solutions nous donne l'équation d'une onde stationnaire (méthode de séparation des variables, que l'on n'a pas le temps de détailler (voir annexe))

Remarque : Une onde plane progressive peut s'interpréter comme la superposition de deux ondes stationnaires.

2. Ventre et nœud de vibration

A un instant t fixé, la forme corde est une sinusoïde. Chaque point de la corde a un mouvement sinusoïdale, tous les points de la corde vibrent alors en phase ou en opposition de phase.

- ❖ Cependant il existe des points qui ne bougent jamais (pour tout t $s(x, t) = 0$) ce sont des **nœuds** de vibration. On observe un nœud de vibration pour les positions x_n tel que: $\cos(kx_n + \psi) = 0$

$$kx_n + \psi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

Deux nœuds sont alors distants de $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{k}$

$$\frac{\pi}{k} = \frac{\pi c}{\omega} = \frac{\pi T c}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$$

- ❖ De même il existe des points pour lesquelles l'amplitude de vibration est maximale quelque soit t et vaut $\pm s_0$. Se sont des **ventres** de vibration ils se situent en x'_n tel que $\cos(kx'_n + \psi) = \pm 1$

$$kx'_n + \psi = n\pi$$

Deux ventres sont alors distants de $\frac{\lambda}{2}$

Un nœud et un ventre sont alors distants de $\frac{\lambda}{4}$

L'existence de ventre et de nœud de vibration est une des propriétés caractéristiques des ondes stationnaires.

3. Oscillations forcées, résonance

On observe sur la corde des ondes stationnaires de petite amplitude sauf pour certaines valeurs de la fréquence du courant alimentant l'électroaimant, pour lesquelles cette amplitude devient importante : il y a **résonance**.

De plus on remarque qu'à la résonance, le vibreur coïncide quasiment avec un nœud de vibration, (ce qui veut dire que le point $y(0,t)$ oscille comme le vibreur)

(Ce qui impose des conditions aux limites ($y(0,t)=y_0 \cos(\omega t)$ et $y(L,t)=0$))

Remarque :

Interprétation physique : Pourquoi son amplitude est-elle très supérieure à l'amplitude de vibration du vibreur ?

Le vibreur envoie dans la corde une onde progressive qui se propage en direction de la poulie. Cette onde se réfléchit sur l'extrémité de la corde en contact avec la poulie, ce qui donne naissance à une deuxième onde se propageant en sens inverse. Cette deuxième onde se réfléchit sur l'autre extrémité de la corde liée au vibreur, donnant naissance à une troisième onde se propageant dans le même sens que la première, qui se réfléchit sur la poulie, donnant une quatrième onde et ainsi de suite...

L'onde stationnaire le long de la corde résulte de la superposition de ces ondes progressives se propageant dans les deux sens. Son amplitude peut être très supérieure à l'amplitude du vibreur puisqu'il y a *superposition d'un grand nombre d'ondes réfléchies successives*.

Pourquoi l'amplitude de vibration de la corde est-elle maximale pour les fréquences f_n ?

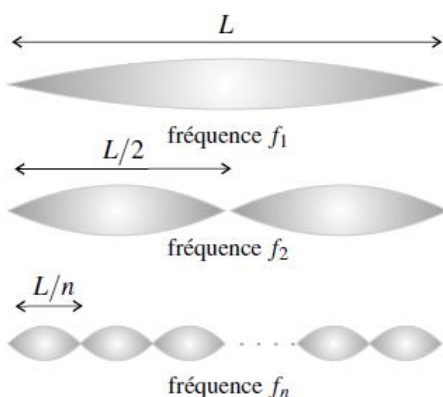
Ceci résulte de la condition d'interférence constructive. En effet, il y a entre deux ondes successives se propageant dans le même sens (la première et la troisième onde ci-dessus, ou la deuxième et la quatrième, par exemple) un décalage dans le temps correspondant à la durée d'un aller-retour le long de la corde soit $\tau = \frac{2L}{c}$. Ces ondes ont donc en tout point un déphasage $\Delta\phi$ donné par :

$$\Delta\phi = \omega\tau = \frac{2\omega L}{c} = 2kL.$$

L'interférence entre ces deux ondes est constructive et l'amplitude résultant est maximale si $\Delta\phi$ est un multiple entier de 2π , soit si :

$$2kL = 2 \frac{2\pi}{\lambda} L = 2n\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

On retrouve cette formule en travaillant directement sur l'aspect de la corde pour différentes fréquences de résonance.



Fréquences de résonance On peut exprimer les fréquences f_n de résonance de la corde. On sait que la distance entre deux nœuds de vibration consécutifs d'une onde stationnaire est égale à $\frac{\lambda}{2}$ où λ est la longueur d'onde. C'est la longueur d'un fuseau.

Lorsque la corde forme n fuseaux on a :

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{soit} \quad \lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (3.5)$$

On en déduit la fréquence f_n de l'onde :

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}.$$

Aspect de la corde pour les différentes fréquences de résonance.

Etude théorique : (important à comprendre – si on y arrive pas regarder juste au dessus avec les centres et les nœud car c'est plus simple pour trouver les fréquences de résonances)

0

Cherchons une solution sous forme d'onde stationnaire de même pulsation que l'excitation : $y(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$, avec $\omega = kc$ vérifiant les conditions aux limites : $y(0, t) = y_0 \cos \omega t$ et $y(L, t) = 0$.

1

La condition en $x = 0$ donne : $y_0 \cos(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos \psi$ donc $\varphi = 0$ et $A \cos \psi = y_0$.

La condition en $x = L$ impose $\cos(kL + \psi) = 0$ soit $kL + \psi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$. Donc :

$$\begin{aligned} \cos(kx + \psi) &= \cos\left(k(x - L) + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin(k(x - L) + n\pi) \\ &= (-1)^n \sin(k(L - x)). \end{aligned}$$

2

3

De même $\cos \psi = (-1)^n \sin(kL)$, d'où :

Pour le trouver $x=0$ à la l'égalité juste au dessus

0 = 1, 2 et 3

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L - x))}{\sin(kL)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Quand $kL = n\pi$, donc quand la fréquence excitatrice est une des fréquences propres de la corde, $y(x, t)$ tend vers l'infini : il y résonance. Dans la pratique, l'amplitude du mouvement de la corde ne diverge pas. Si les mouvements deviennent de grande amplitude, l'approximation linéaire faite pour établir l'équation de d'Alembert ne convient plus. Les effets non linéaires provoquent une saturation de l'amplitude des oscillations.

Dans l'expérience de la corde de Melde, une résonance est observée chaque fois que la fréquence d'excitation correspond à la fréquence d'un mode propre de vibration de la corde

4. Modes propres (oscillation libre avec conditions aux limites) (corde de guitare)

On s'intéresse à une corde de longueur L fixée à ses 2 extrémités. Les conditions aux limites sont donc imposée :

$$y(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L, t) = 0$$

On cherche une onde stationnaire $y(x, t)$ de la forme : $y(x, t) = 2A(\cos(\omega t + \varphi))(\cos(kx + \psi))$

Les conditions aux limites imposées pour tout t :

$$\begin{cases} y(0, t) = 2A(\cos(\omega t + \varphi))(\cos(\psi)) = 0 \\ y(L, t) = 2A(\cos(\omega t + \varphi))(\cos(kL + \psi)) = 0 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \cos(\psi) = 0 \\ \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \psi = \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(kL + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad -\sin(kL) = 0 \quad \text{et donc} \quad kL = n\pi$$

La norme du vecteur d'onde k et la pulsation ω ne peuvent prendre que des valeurs discrètes que l'on appelle des modes propres de vibration

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}$$

$$\text{Comme : } \omega_n = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_n$$

La fréquence est donnée par :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L} = n f_0$$

Les fréquences sont toutes un multiple entier d'une fréquence $f_0 = \frac{c}{2L}$ appelée fréquence fondamentale

Les longueurs d'onde sont reliées à la longueur de la corde par : $\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}$

Les solutions particulières de l'onde stationnaire sont donc : $y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}x\right)$

Pour $n=1$ on parle de fondamentale et pour $n>1$ on parle de n -ième harmonique

La solution générale est obtenue par superposition de tous les modes propres soit :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}x\right)$$

Les amplitudes A_n et les phases initiales φ_n dépendent des conditions initiales du mouvement. On peut choisir ces conditions de manière à changer le poids des différents modes. Par exemple en imposant un déplacement initial grand là où un mode présente un nœud de vibration on défavorise ce mode qui aura une amplitude faible.

La vibration d'une corde d'instrument de musique est ainsi une superposition de vibrations sinusoïdales de toutes les fréquences propres de la corde. Le son émis contient aussi toutes ces fréquences. C'est un signal périodique non sinusoïdal dont le fondamental a la fréquence $f_0 = \frac{c}{2L}$ et les harmoniques les fréquences $f_n = n f_0$. Si L augmente, la fréquence f_0 diminue, et le son produit est plus grave. C'est un fait bien connu : les cordes d'une contrebasse sont plus longues que celles d'un violon.

Conclusion : Faire une ouverture sur les instruments de musique (corde frappée) et des instruments à vents

Partie Pédagogique :

2nd : Dans la partie sport : approche qualitative

TS : Comprendre - Lois et modèle : Approche quantitative

Conclusion :