

Leçon 18 : Temps-fréquence

Biblio :

Carte mentale :

- H-prépa mécanique mpsi ou pcsi
- L'astronomie en questions
- Sujet physique agrégation interne 2017

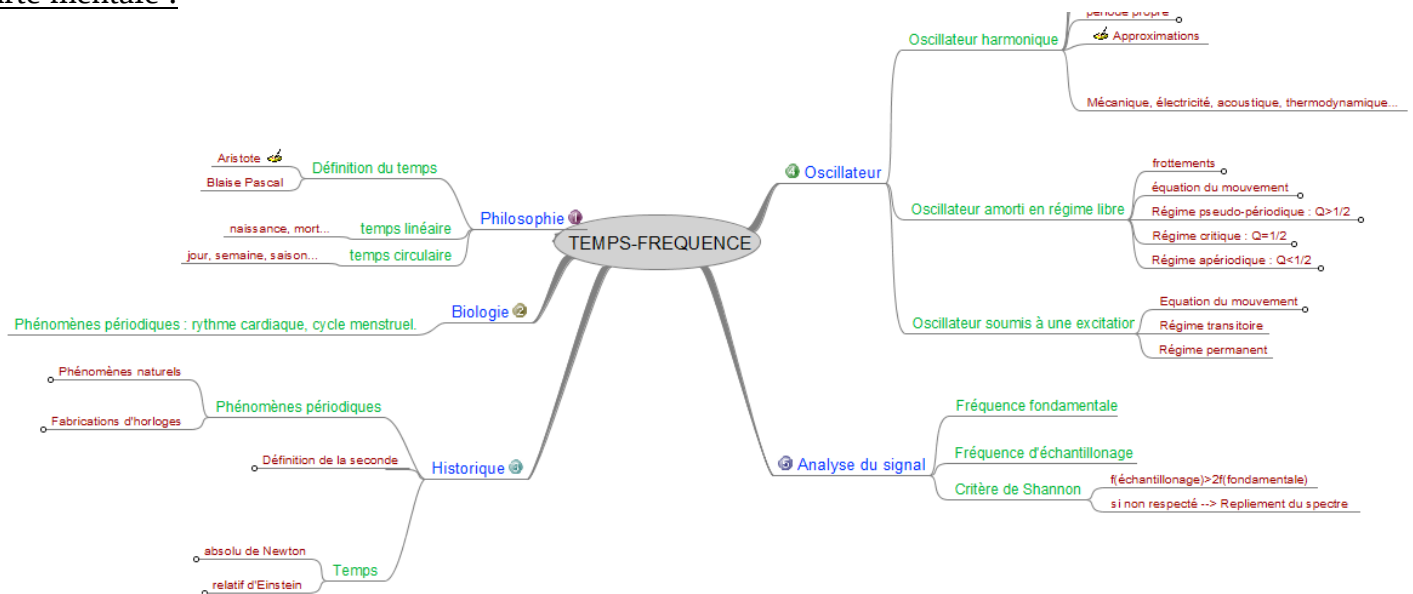
Partie post-bac :

1001 questions PCSI p 352 (via exercice sur le pendule pesant)

BUP 799 : article « du réveil à la montre à quartz »

H-prépa exercices problème mpsi p 353 (exercice quartz)

Carte mentale :



Introduction :

Le XVII^e siècle voit l'apparition d'une nouvelle pratique de la science, fondée sur de véritables expériences, libérée de la domination de l'Eglise. Des chercheurs comme Galilée, Kepler, Descartes ou Newton proposent une nouvelle approche du monde, fondée sur l'observation exacte de la nature. Avoir à sa disposition des instruments précis pour faire des mesures exactes devenait alors indispensable. La mesure du temps est évidemment au centre des préoccupations de cette époque. Les instruments de mesure, jusqu'alors, indiquaient le temps de manière très imprécise et n'affichaient que les heures. Il fallut trouver des dispositifs plus adaptés. C'est le pendule qui allait bientôt jouer un rôle primordial dans cette quête.

Galilée, avant de comprendre l'utilité d'un pendule pour mesurer un temps, essayait de mesurer des temps pour ses expériences de mécanique en mesurant le rythme cardiaque des personnes. Le problème était que le rythme cardiaque varie d'une personne à une autre et peut varier aussi pour une même personne selon son stress... Il fallait donc une autre méthode pour mesurer un temps.

Galilée (1564-1642) aurait découvert les propriétés du pendule en observant le lustre de la cathédrale de Pise osciller. Il aurait ainsi remarqué que les balancements du lustre conservaient la même durée, bien que leur oscillation diminuât.

Il faut dire que le pendule, par son mouvement régulier, intrigue les observateurs : Forçons-le à battre plus rapidement, il va toujours revenir à son mouvement propre ! Galilée devina déjà des possibilités de son application à la mesure du temps. A la fin de sa vie, il eut l'idée de réaliser une horloge utilisant un pendule comme régulateur. Mais ce sera à **Christiaan Huygens** (1629-1695), savant et mathématicien hollandais, que reviendra le privilège de construire en 1657 la première horloge viable, réglée par un pendule.

Quel changement ! L'introduction de ce régulateur fut une amélioration considérable pour la mesure du temps et permit de réaliser à peu de frais un très grand perfectionnement. De nombreuses horloges furent équipées de ce nouveau dispositif. Voilà pourquoi on parle encore aujourd'hui d'une « pendule » pour dire horloge !

Partie 1 : Le pendule pesant

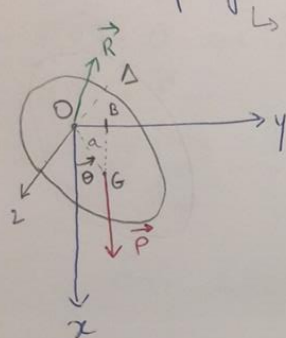
①

Temps - fréquence

Post-Bac - Le Pendule Pesant. 2001 questions PCSEI p 352.

Soit un solide de masse m , mobile autour d'un axe horizontal $\Delta = O_2$ ne passant pas par son centre de masse G est tel que $OG = a$.
 Son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ est J_Δ et la liaison en O est parfaite.

$\hookrightarrow M_O(\vec{R}) = 0 \Rightarrow$ liaison bien huilée, pas grippée et donc, en l'absence de frottements, le mt en reg libre n'est pas amorti.



Système : solide de masse m
 Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Forces : Poids $\vec{P}$
 Réaction de l'axe $\vec{R}$

• Théorème du moment cinétique :

$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum M_\Delta$

$\uparrow$ Moment d'inertie
 $\uparrow$ Moment de force - axe

ω : vitesse angulaire du solide autour de Δ .

$M_O(\vec{R}) = 0$ (liaison parfaite)

$M_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg a \sin \theta \end{vmatrix}$

Rq : Se trouve aussi en faisant le produit de la force mg par le bras de levier $OB = a \sin \theta$ (distance de la droite d'action de la force à l'axe de rotation Δ)
 avec signe "-" car le poids a tendance à faire tourner le solide suivant -

d'où $J_\Delta \ddot{\theta} = -mg a \sin \theta$ (1)

Remarque : Pour ajouter des forces de frottement du à l'axe de rotation il faut rajouter un couple de force de frottement et ne pas calculer le moment d'une seule force de frottement (puisque'il y en a tout autour de l'axe)

Avec des frottements fluides : On suppose que le moment de freinage correspondant est proportionnel à la vitesse de rotation : $K \frac{d\theta}{dt}$

• Période / fréquence

▷ Oscillatos de faible amplitude:

$$(1) \Rightarrow J_{\Delta} \ddot{\theta} = -mga \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{mga}{J_{\Delta}} \theta = -\omega_0^2 \theta$$

avec ω_0 : pulsatio propre du syst.

On retrouve l'équa diff d'un oscillateur harmonique d'où des oscillatos sinusoïdales de période:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}}$$

indpt θ_0

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mga}{J_{\Delta}}}$$

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}} = \text{s}^{-1}$$

Rq: Pendule simple (masse m quasi ponctuelle à l'extrémité d'une tige (pt) de masse négligeable, de longueur $a = l = OG$)

$$J_{\Delta} = ml^2 \text{ d'où } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

▷ angles plus grands:

T_1 dépend de θ_0

Formule de Borda: $T_1 = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mga}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

▷ Jusqu'à quel angle θ_0 l'écart entre T_1 et T_0 ne dépasse-t-il pas 1% ?

(3)

+ l'amplitude est grande, + la période est grande.

$$\text{Écart relatif: } \frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{\theta_0^2}{16} \leq 0,01 \Leftrightarrow \theta_0^2 \leq 0,16$$

$$\theta_0 \leq 0,4 \text{ rad soit } \approx 23^\circ$$

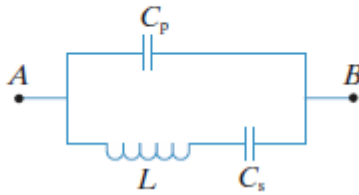
Rq: Souvent, ds énoncés, petits angles $\leq 20^\circ$.

Le problème de ce type d'oscillateurs est que la fréquence de résonance peut varier facilement car elle dépend de la masse, de g , de a , paramètres pouvant évoluer dans le temps. Ces oscillateurs ne peuvent donc pas constituer des horloges très précises, il faut trouver autre chose...

Partie 2 : Horloge à quartz

A. Le résonateur à quartz (H-prépa exercices et problèmes p 354)

Entre ses deux bornes A et B, on peut donner pour un quartz le circuit équivalent schématisé ci-dessous.

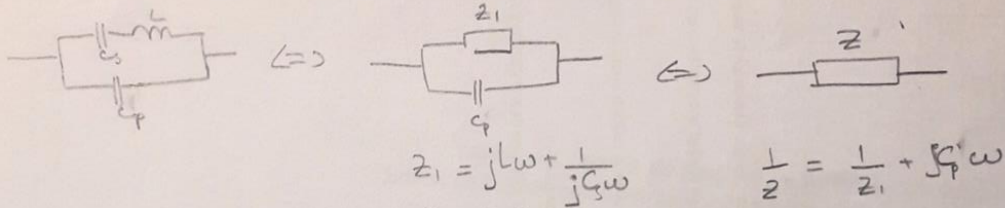


1 • Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ entre A et B en fonction de L , C_s , C_p et de la pulsation ω .

Mettre $\underline{Z}$ sous la forme $\underline{Z} = j \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)}$.

Identifier ω_s et ω_p .

a) Pour $R = 0$



$$\frac{1}{Z} = \frac{jC_s \omega}{1 - LC_s \omega^2} + jC_p \omega$$

$$= \frac{jC_s \omega + jC_p \omega - jLC_s C_p \omega^3}{1 - LC_s \omega^2}$$

$$Z = \frac{1 - LC_s \omega^2}{jC_s \omega + jC_p \omega - jLC_s C_p \omega^3} = \frac{j \frac{1}{LC_s} (1 - LC_s \omega^2)}{j (C_s \omega + C_p \omega - LC_s C_p \omega^3)}$$

$$= \frac{j \left(\frac{1}{LC_s} - \omega^2 \right)}{-\frac{\omega}{L} - \frac{C_p}{LC_s} \omega + C' \omega^3} = \frac{j \left(\frac{1}{LC_s} - \omega^2 \right)}{C_p \omega \left(\omega^2 - \frac{1}{LC_p} - \frac{1}{LC_s} \right)}$$

$$C' = C_s C_p$$

$$= \frac{j \left(\frac{1}{LC_s} - \omega^2 \right)}{C' \omega \left[\omega^2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s} \right) \right]}$$

$$= \frac{j (\omega_s^2 - \omega^2)}{C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)}$$

$$\omega_s^2 = \frac{1}{LC_s}$$

$$\omega_p^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s} \right) = \frac{1}{L} \left(\frac{C_s + C_p}{C_p C_s} \right)$$

• Comparons ω_s^2 et ω_p^2 (pour savoir laquelle est la + grande)

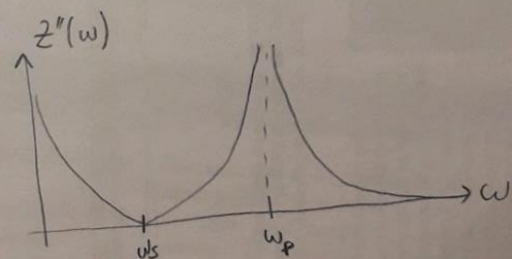
$$\frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} = \frac{1 (C_s + C_p) \cancel{LC_s}}{\cancel{L} C_p \cancel{C_s}} = \frac{C_s + C_p}{C_p} > 1 \Rightarrow \omega_s < \omega_p$$

• BF : $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow +\infty$

• $\omega = \omega_s \Rightarrow Z''(\omega) = 0$

• $\omega = \omega_p \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow +\infty$

• $\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow 0$



• $e(t) = Z''(\omega) i \Rightarrow i \text{ max qd } Z'' \text{ min c'ed pr } \omega = \omega_s \Rightarrow \text{R\'esonance}$

Pour $\omega = \omega_s$, on a une résonance en intensité.

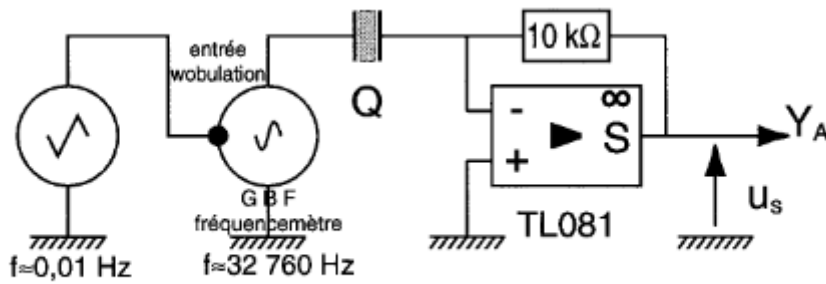


Figure 7 : Montage expérimental.

Les GBF actuels font directement la wobulation. On le règle pour $f=0,01\text{Hz}$, soit $T=100\text{s}$ et on observe la courbe de résonance via le convertisseur courant – tension à l'oscilloscope. (permet de s'affranchir d'une résistance).

L'amplificateur opérationnel monté en convertisseur courant-tension permet de visualiser u_s , l'image de l'intensité qui traverse le quartz (Q). Compte tenu de la présence de l'amplificateur opérationnel, ce montage permet d'alimenter le quartz sous une tension sinusoïdale d'amplitude constante, même à la résonance, lorsque son impédance est faible.

L'expérience est spectaculaire : on obtient une tension d'amplitude élevée de 3 à 10 V uniquement pour des fréquences voisines de 32 768 Hz à 2 ou 3 Hz près. Le quartz est un composant électronique fragile, aussi faut-il veiller à régler la valeur de l'amplitude de la tension du GBF en-dessous de 1 V. (Lors d'une manipulation, la tension de sortie a atteint plus de vingt fois la valeur de la tension d'entrée à la résonance, le quartz ne s'en est pas remis.)

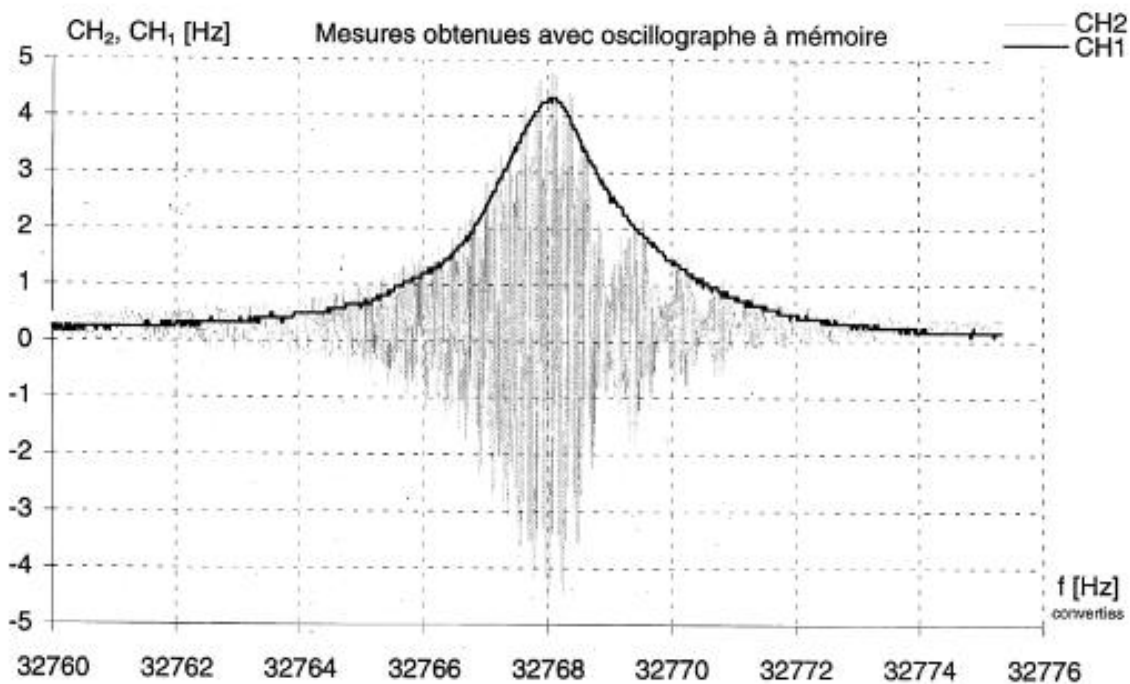


Figure 8 : Graphe de résonance.

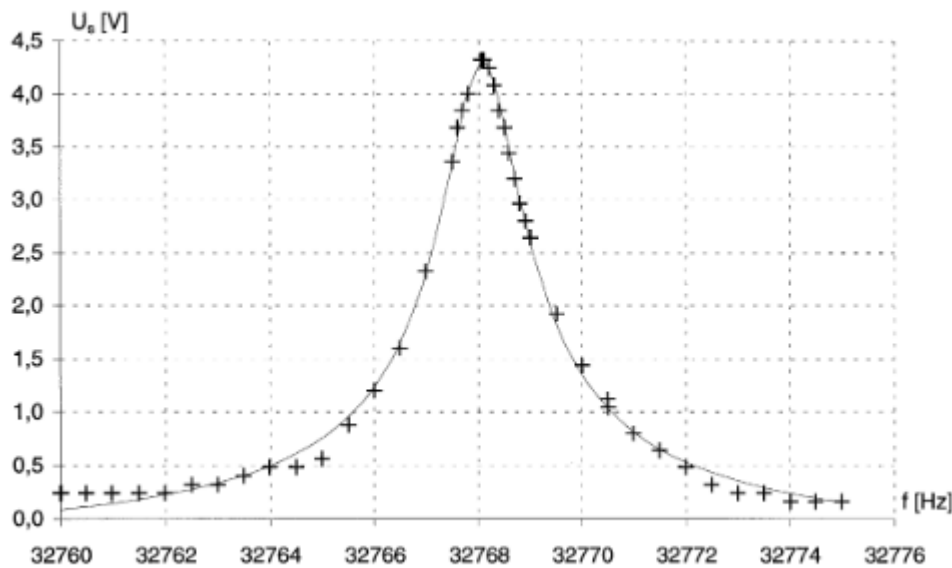


Figure 10 : Courbe de résonance d'un quartz.

(Ce type de graphe est à rapprocher de celui correspondant à la résonance d'intensité dans un circuit RLC série. Cette analogie militerait pour une impédance à caractère purement résistif à la résonance.)

On définit alors la Bande-Passante : c'est l'intervalle de fréquence telle que $U_s \geq \frac{U_{s,max}}{\sqrt{2}} = \frac{4,8}{\sqrt{2}} \approx 3,0V$

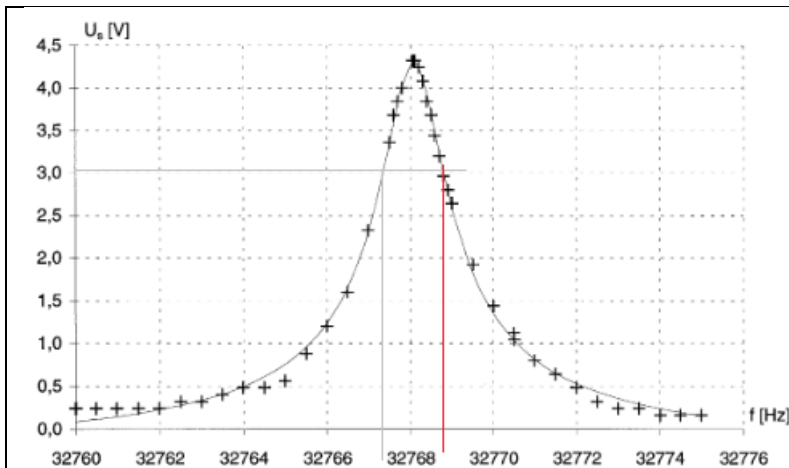


Figure 10 : Courbe de résonance d'un quartz.

On trouve $f_1 = 32767,3$ Hz et
 $f_2 = 32768,8$ Hz soit
 $\Delta f = f_2 - f_1 = 1,5$ Hz

Soit Q : le facteur de qualité (caractérise l'acuité de la résonance).

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{32768}{1,5} \approx 22000$$

ce qui est facteur de qualité très grand et montre donc une résonance très fine, qui permettra donc de mesurer des temps avec précision.

Rq : Facteur de qualité pour le diapason de l'ordre de 1000 pour le La 440 avec un pic de résonance fin.

Partie Pédagogique :

Déroulement de l'activité

La fréquence en physique et en médecine

- Classe : 2nde
- Partie du programme :

LA SANTÉ

Les citoyens doivent acquérir une culture scientifique de façon à procéder à des choix raisonnés en matière de santé. L'objectif de ce thème est de montrer et d'expliquer le rôle des sciences physiques et chimiques dans les domaines du diagnostic médical et des médicaments.

NOTIONS ET CONTENUS	COMPÉTENCES ATTENDUES
Le diagnostic médical : l'analyse de signaux périodiques, l'utilisation de l'imagerie et des analyses médicales permettent d'établir un diagnostic. Des exemples seront pris dans le domaine de la santé (électrocardiogramme, électroencéphalogramme, radiographie, échographie, fibroscopie, ...). L'observation de résultats d'analyses médicales permet d'introduire les notions de concentration et d'espèces chimiques ainsi que des considérations sur la constitution et la structure de la matière.	
Signaux périodiques : période, fréquence, tension maximale, tension minimale.	Connaître et utiliser les définitions de la période et de la fréquence d'un phénomène périodique. <i>Identifier le caractère périodique d'un signal sur une durée donnée.</i> <i>Déterminer les caractéristiques d'un signal périodique.</i>

- Organisation : 1h de préférence en demi-groupe, mais faisable en classe entière si les élèves sont habitués à travailler par groupe autonome.

- Pré-requis :

Déterminer motif, période d'un signal périodique. Calculer une fréquence. (**jusqu'à cette année seulement**).

Calculer une fréquence (**avec les futurs 2nde car plus de signaux périodiques dans le programme du cycle 4 → Rajouter des documents qui étaient en coups de pouce à l'activité**).

- Objectif(s) :
 - Identifier le caractère périodique d'un signal sur une durée donnée.
 - Calculer des fréquences à partir d'ECG.

- Déroulement

Professeur	Elèves	Durée
Appel	Installation	5'
Présentation de l'activité	Lecture et questions éventuelles.	10'
Passage dans les rangs après 10 minutes et distribution des coups de pouce si besoin	Travail de groupe (débat, rédaction du texte...)	35'
Bilan oral	Bilan	5'
Ramassage d'un exemplaire par groupe		

Monsieur Barney se rend chez son médecin sans avoir pris rendez-vous car il pense avoir des problèmes de cœur. La file d'attente étant longue, il vous donne les documents qu'il a recensés et les informations le concernant afin d'avoir une idée de son état de santé.

Vous devrez, par groupe, écrire une lettre à Monsieur Barney expliquant votre démarche pour déterminer si son activité cardiaque est normale ou pas. Vous devrez préciser les fréquences cardiaques pour un cœur normal, un cœur souffrant de tachycardie et un cœur souffrant de bradycardie afin de justifier votre réponse.

Les documents recensés sont fournis ci-dessous.

Doc A : Informations sur Monsieur Barney :

Age : 30 ans
Sportif : non
Régime alimentaire : sain
Fréquence cardiaque : 140 battements par minute.

Doc B : ECG d'un cœur normal



Un ECG normal comporte trois parties correspondant à un cycle cardiaque.

Doc C : Principe d'un ECG

Le cœur est un organe constitué de fibres musculaires. Au cours du fonctionnement du cœur, chaque fibre se comporte comme un générateur de tension variable.

Les variations de tension ainsi créées se propagent dans les tissus conducteurs. On les retrouve au niveau des cellules de la peau où elles peuvent être détectées grâce à des électrodes.

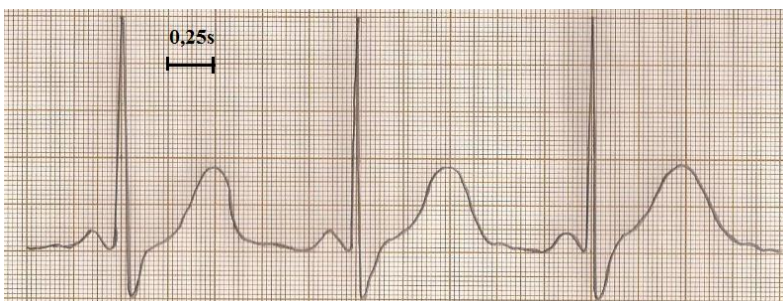
Ces variations reflètent l'activité du cœur. Elles peuvent être visualisées sur l'écran d'un oscilloscope.

On peut aussi les enregistrer sur papier : le graphique obtenu est appelé électrocardiogramme (ECG)

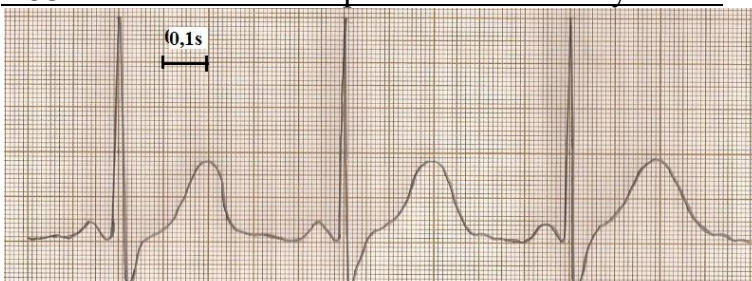
Chaque motif élémentaire d'un électrocardiogramme correspond à un cycle complet de contractions et de relâchements du cœur.

L'analyse d'un électrocardiogramme permet de vérifier la régularité de la fréquence cardiaque (nombre de cycles par minute) et de déceler ainsi d'éventuelles anomalies cardiaques

Doc D : ECG d'un cœur présentant une bradycardie.



Doc E : ECG d'un cœur présentant une tachycardie.



Doc F : Différents troubles du cœur.

- Tachycardie : fréquence cardiaque trop rapide.
- Bradycardie : fréquence cardiaque trop faible.

Doc G : Période et fréquence

La période, notée T , correspond à la durée d'un motif.

La fréquence, notée f , s'exprime en Hertz (Hz) et représente le nombre de motifs qui se répètent en une seconde.

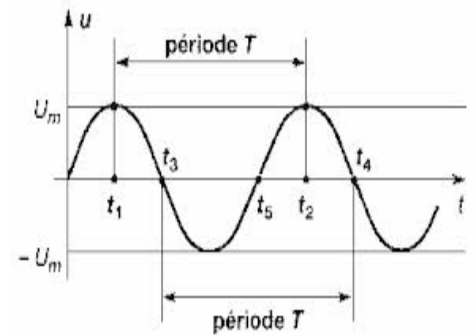
On peut également la calculer grâce à la formule : $f = \frac{1}{T}$ avec T obligatoirement en secondes.

Coups de pouce

Coup de pouce 1 : Les signaux périodiques

Dans l'étude d'une tension périodique dont l'oscillogramme est enregistré ci-contre, nous pouvons repérer :

- la tension maximale $U_{\max}$ qui est la valeur maximale de la tension, en volt (V) ;
- la période T qui est la durée correspondant à un motif élémentaire exprimée en seconde (s).



Si les élèves ont du mal à calculer le nombre de battements à partir de la fréquence...

Coup de pouce 2 : Calcul du nombre de pulsations par minute à partir d'une fréquence.

La fréquence étant le nombre de motif(s) élémentaire(s) par seconde, on peut aisément en déduire le nombre de battements par minute...Pensez à la proportionnalité.

		Niveau de maitrise			
Compétences générales	Compétence évaluée	A	B	C	D
S'APPROPRIER	Identifier le problème et le décrire avec ses mots.				
ANALYSER	Relier les documents entre eux.				
	Conduire un raisonnement scientifique.				
REALISER	Identifier les motifs sur les ECG				
	Déterminer les périodes sur les 3 ECG				
	Déterminer les fréquences cardiaques des 3 ECG				
	Utiliser la formule de la fréquence correctement.				
	Calculer les fréquences cardiaques correspondantes.				
VALIDER	Comparer la fréquence cardiaque du patient avec celles calculées.				
COMMUNIQUER	Rédiger une argumentation répondant au problème posé.				
	Présenter sous forme de lettre en utilisant un langage adapté.				