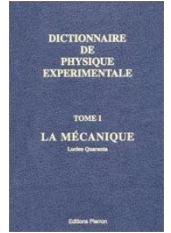


15-L- Résonance

Bibliographie : Quaranta de mécanique
BUP n 799 de l'horloge au pendule



Intro :

Post Bac

Transition : Phénomène de résonance que l'on cherche à éviter

1. **Résonances dans un oscillateur mécanique verticale: oscillation forcée d'une masse suspendu à un ressort** Biographie utilisée : Quaranta de mécanique p 275

Faire comme dans le Quaranta, pour différente valeur d'amortissement (jouer sur la surface de la masse ou sur la viscosité de l'eau (rajouter de la glycérine mais non miscible à l'eau ou carrément utiliser de la glycérine) tracer la courbe de résonance en élongation et en vitesse. comme dans le livre.

Transition : Phénomène de résonance recherché

2. **Phénomène de résonance dans l'horloge à quartz (RLC):**

Montage : avec l'oscillateur à quartz

Transition : Phénomène de résonance recherché

Péda : TS – spécialité : Son et musique

Conclusion : Ouverture sur analogie électro mécanique (ou en optique)

Résonance : Amplitude $\longleftrightarrow$ Tension

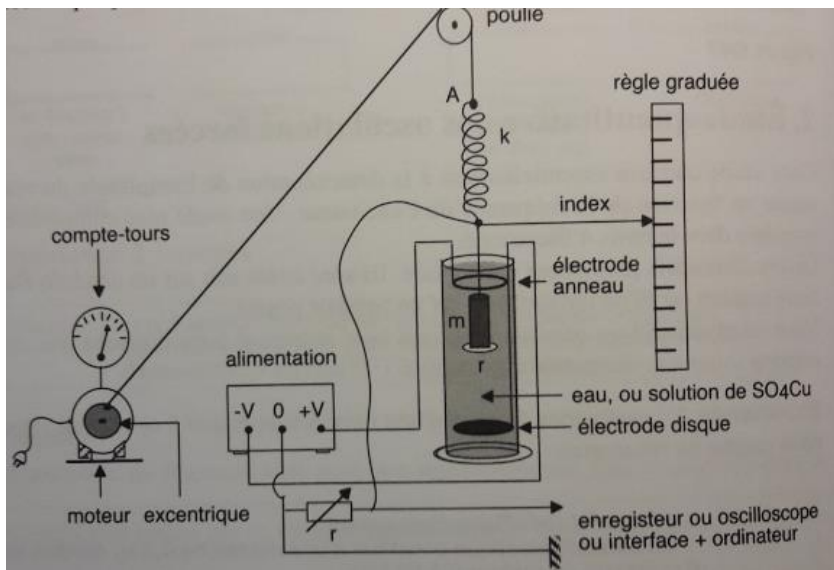
$\longleftrightarrow$
Résonance : Vitesse Intensité

Intro :

2. Résonances dans un oscillateur mécanique verticale : oscillation forcée d'une masse suspendu à un ressort

Biographie utilisée : Quaranta de mécanique p 275

Faire comme dans le Quaranta, pour différente valeur d'amortissement (jouer sur la surface de la masse ou sur la viscosité de l'eau (rajouter de la glycérine mais non miscible à l'eau ou carrément utiliser de la glycérine) tracer la courbe de résonance en élongation et en vitesse. comme dans le livre.

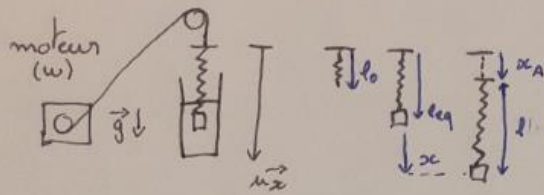


On remplace le dispositif du bas par la webcam et l'enregistrement automatique.

$$X_{\max} = \frac{kx_0}{r \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}}$$

Démonstration :

Oscillations forcées d'une masse suspendue à un ressort.



D'où $l_{eq} + x = l + x_A$ avec $x_A = x_0 \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow \boxed{l = l_{eq} + x - x_A}$$

Dans R du laboratoire considéré comme galiléen / Système de masse m

Bilan des forces : Poids : $\vec{P} = mg \vec{u}_x$

frottement fluide : $\vec{f}_f = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$

Force de rappel : $\vec{f}_r = -k \underbrace{(l - l_0)}_{\substack{\text{allongement} \\ \text{longueur du ressort à t} - \text{longueur à vide}}} \vec{u}_x$

du ressort vers la masse

Remarque : Si on considère la poussée d'Archimède, le poids sera corrigé d'un facteur $(1 - \frac{\rho_{fluide}}{\rho_{masse}})$

Démo : $\vec{P} + \vec{\pi} = (\rho_m V g - \rho_f V g) \vec{u}_x = \rho_m V g (1 - \frac{\rho_f}{\rho_m}) \vec{u}_x$ avec $\rho_f = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $\rho_m = 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $\rho_{corrigé} = 0,9 \rho$

PFD : $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$ sur $\vec{u}_x$: $\boxed{m \ddot{x} = mg - k(l - l_0) - \alpha \dot{x}}$ (1)

à l'équilibre $0 = mg - k(l_{eq} - l_0)$ (2)

(1)-(2) $\rightarrow m \ddot{x} = +k(l_{eq} - l_0) - k(l - l_0) - \alpha \dot{x} = -k(l - l_{eq}) - \alpha \dot{x}$
 $= -k(x - x_A) - \alpha \dot{x}$

D'où $\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} x_A}$ $\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_A}$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$Q = \frac{m \omega_0}{\alpha}$$

Le reste des calculs il faut le faire sur Diaporama ou alors on prend une photo de nos notes

- Diapo

En complexe $\underline{x}_A = x_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{x} = |\underline{x}| e^{i(\omega t + \varphi)}$

$$\text{D'où } |\underline{x}| \left(-\omega^2 + i \frac{\omega \alpha}{m} + \frac{k}{m} \right) e^{i(\omega t + \varphi)} = x_0 e^{i\omega t}$$

égalité des modules : $|\underline{x}| = \frac{x_0}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega \alpha}{m}\right)^2}} = x_0 \left(\underbrace{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2}_u + \underbrace{\left(\frac{\omega \alpha}{m}\right)^2}_v \right)^{-1/2}$

$$u' = 2(k - m\omega^2)(-2m\omega)$$

$$v' = 2\omega\alpha^2$$

On cherche $|\underline{x}|(\omega)_{\max}$:

$$\frac{d|\underline{x}|}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d|\underline{x}|}{d\omega} = -\frac{1}{2} x_0 (u' + v') (u + v)^{-3/2}$$

$$= -\frac{1}{2} x_0 \underbrace{(-4m\omega(k - m\omega^2) + 2\omega\alpha^2)}_{\text{numérateur}} \underbrace{\left(\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega \alpha}{m}\right)^2 \right)^{-3/2}}_{\text{dénominateur}}$$

$$\frac{d|\underline{x}|}{d\omega} = 0 \Rightarrow \text{numérateur} = 0 \quad -4m\omega(k - m\omega^2) = -2\omega\alpha^2 \Rightarrow k - m\omega^2 = \frac{\alpha^2}{2m} \Rightarrow m\omega^2 = k - \frac{\alpha^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}}}$$

Pour la position la fréquence de résonance dépend de $\alpha = r$ la viscosité de fluide (résistance ne électricité)

De même pour la valeur maximale et on retrouve la courbe de résonance si dessous

$$V = \omega X = \frac{kx_0}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}}$$

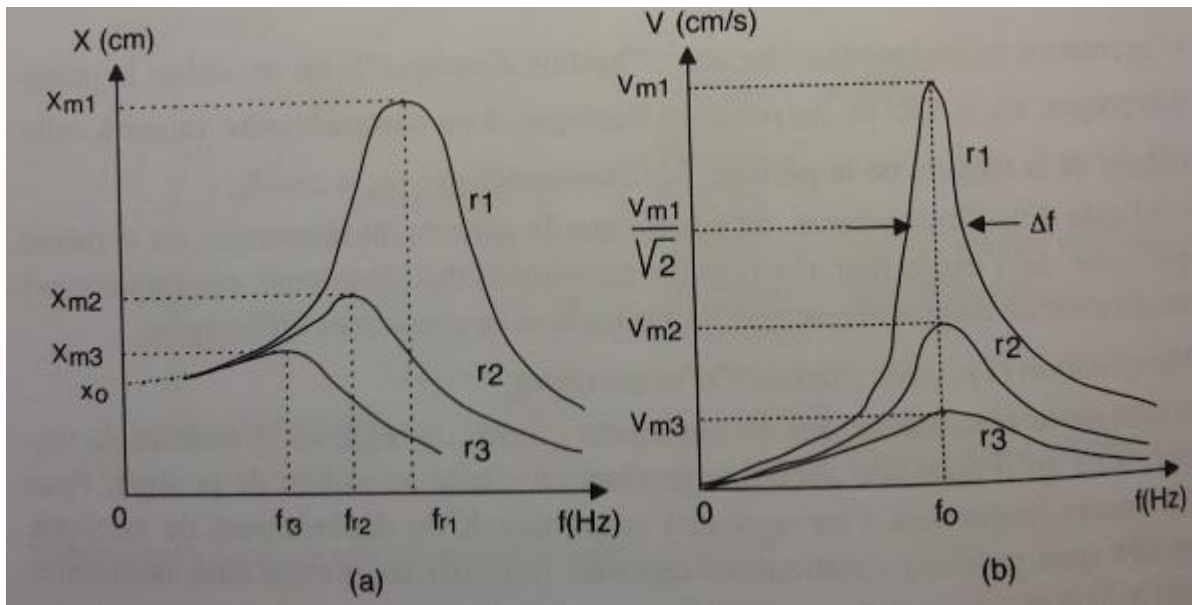
Pour ce qui est de la vitesse : elle est maximale quelque soit la viscosité

$$|V| = \omega |\underline{x}| = \frac{x_0 \omega}{\sqrt{\omega^2 \left(\frac{k}{m\omega^2} - 1\right)^2 + \omega^2 \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{\left(\frac{k}{m\omega^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}}$$

Maximal pour $\left(\frac{k}{m\omega^2} - 1\right) = 0 \Rightarrow k = m\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$$V_{\max} = kx_0/r \text{ pour } \omega = \omega_0 \text{ (résonance).}$$

Par contre ça vitesse maximale dépend de la viscosité
On trace grâce aux mesures réalisée sur l'ordinateur.

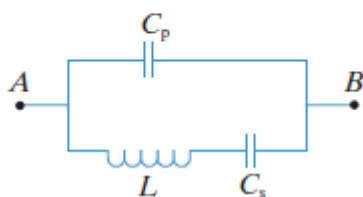


3. Résonance dans une horloge à quartz:

A. Le résonateur à quartz

(H-prépa exercices et problèmes p 354)

Entre ses deux bornes A et B , on peut donner pour un quartz le circuit équivalent schématisé ci-dessous.

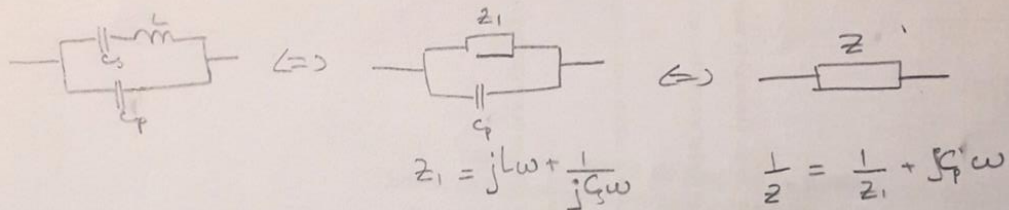


1 • Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ entre A et B en fonction de L , C_s , C_p et de la pulsation ω .

Mettre $\underline{Z}$ sous la forme $\underline{Z} = j \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)}$.

Identifier ω_s et ω_p .

a) Pour $R = 0$



$$\frac{1}{Z} = \frac{j\omega C_s}{1 - LC_s\omega^2} + j\omega C_p$$

$$= \frac{j\omega C_s + j\omega C_p(1 - LC_s\omega^2)}{1 - LC_s\omega^2}$$

$$Z = \frac{1 - LC_s\omega^2}{j\omega C_s + j\omega C_p(1 - LC_s\omega^2)}$$

$$= \frac{j(\frac{1}{LC_s} - \omega^2)}{-\frac{\omega}{L} - \frac{C_p}{LC_s}\omega + C'\omega^3}$$

$$= \frac{j(\frac{1}{LC_s} - \omega^2)}{-\frac{\omega}{L} - \frac{C_p}{LC_s}\omega + C'\omega^3}$$

$$= \frac{j(\omega_s^2 - \omega^2)}{C_p\omega(\omega^2 - \omega_p^2)}$$

$$= \frac{j(\frac{1}{LC_s} - \omega^2)}{C'\omega[\omega^2 - \frac{1}{L}(\frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s})]}$$

$$= \frac{\frac{j}{LC_s}(1 - LC_s\omega^2)}{\frac{j}{LC_s}(j\omega C_s + j\omega C_p(1 - LC_s\omega^2))}$$

$$= \frac{LC_s}{j(\frac{1}{LC_s} - \omega^2)}$$

$$= \frac{C_p\omega(\omega^2 - \frac{1}{LC_p} - \frac{1}{LC_s})}{j(\omega_s^2 - \omega^2)}$$

$$C' = C_s C_p$$

$$\omega_s^2 = \frac{1}{LC_s}$$

$$\omega_p^2 = \frac{1}{L}(\frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s})$$

$$= \frac{1}{L}(\frac{C_s + C_p}{C_p C_s})$$

• Comparons ω_s^2 et ω_p^2 (pour savoir laquelle est la + grande)

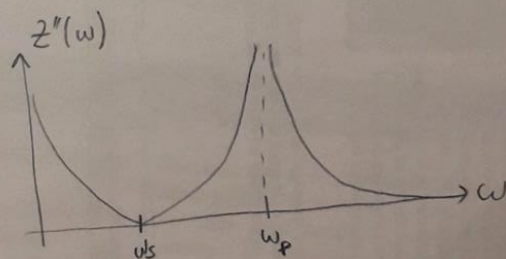
$$\frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} = \frac{1(C_s + C_p) \cancel{LC_s}}{\cancel{L} C_p C_s} = \frac{C_s + C_p}{C_p} > 1 \Rightarrow \omega_s < \omega_p$$

• BF : $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow +\infty$

• $\omega = \omega_s \Rightarrow Z''(\omega) = 0$

• $\omega = \omega_p \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow +\infty$

• $\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow Z''(\omega) \rightarrow 0$



• $e(t) = Z''(\omega) i \Rightarrow i \text{ max qd } Z'' \text{ min cad pr } \omega = \omega_s \Rightarrow \text{Résonance}$

Pour $\omega = \omega_s$, on a une résonance en intensité.

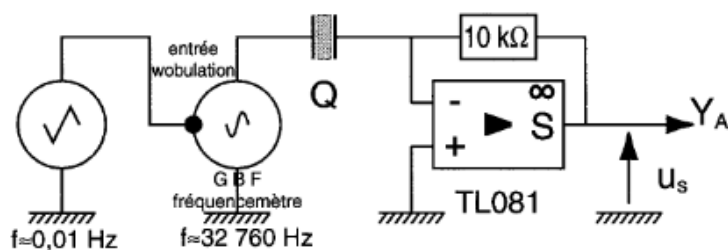


Figure 7 : Montage expérimental.

Les GBF actuels font directement la wobulation. On le règle pour $f=0,01\text{Hz}$, soit $T=100\text{s}$ et on observe la courbe de résonance via le convertisseur courant – tension à l'oscilloscope. (permet de s'affranchir d'une résistance).

L'amplificateur opérationnel monté en convertisseur courant-tension permet de visualiser u_s , l'image de l'intensité qui traverse le quartz (Q). Compte tenu de la présence de l'amplificateur opérationnel, ce montage permet d'alimenter le quartz sous une tension sinusoïdale d'amplitude constante, même à la résonance, lorsque son impédance est faible.

L'expérience est spectaculaire : on obtient une tension d'amplitude élevée de 3 à 10 V uniquement pour des fréquences voisines de 32 768 Hz à 2 ou 3 Hz près. Le quartz est un composant électronique fragile, aussi faut-il veiller à régler la valeur de l'amplitude de la tension du GBF en-dessous de 1 V. (Lors d'une manipulation, la tension de sortie a atteint plus de vingt fois la valeur de la tension d'entrée à la résonance, le quartz ne s'en est pas remis.)

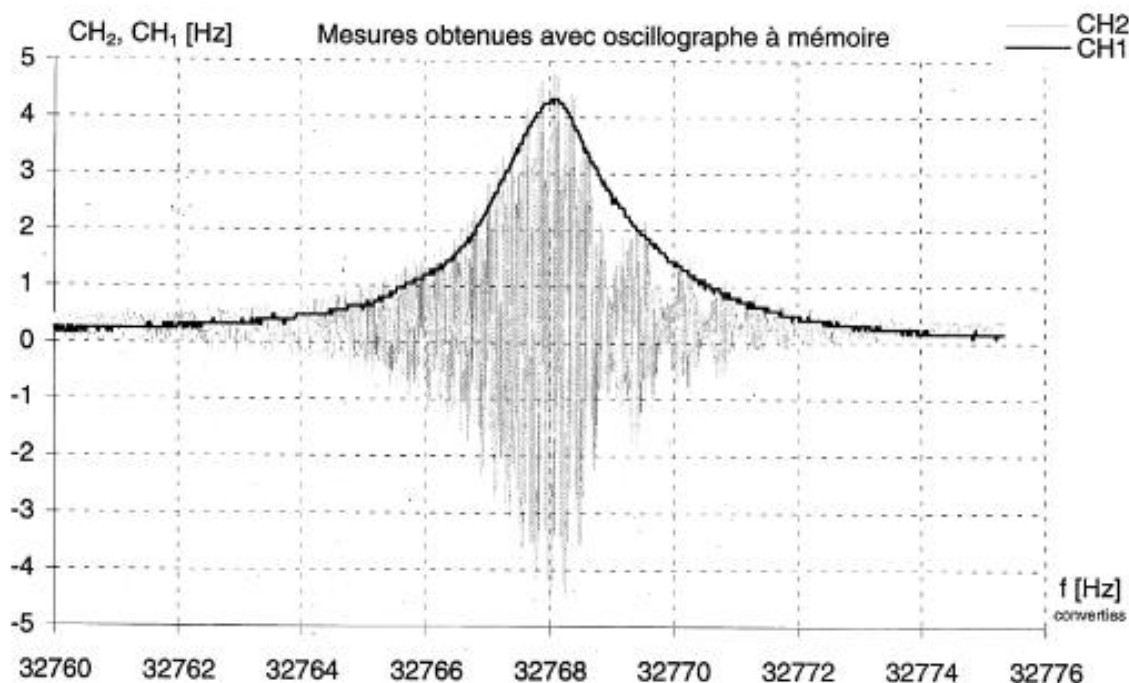


Figure 8 : Graphe de résonance.

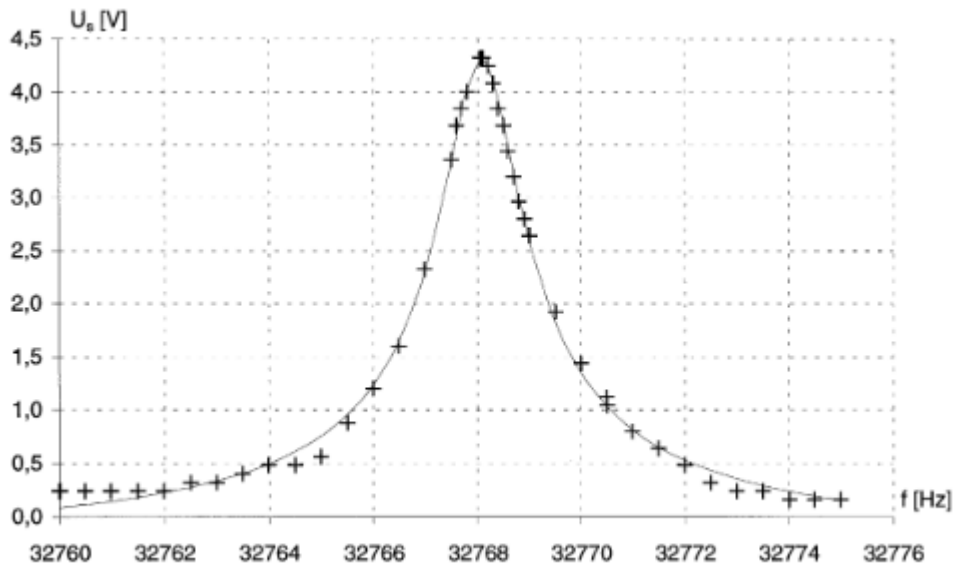


Figure 10 : Courbe de résonance d'un quartz.

(Ce type de graphe est à rapprocher de celui correspondant à la résonance d'intensité dans un circuit RLC série. Cette analogie militerait pour une impédance à caractère purement résistif à la résonance.)

On définit alors la Bande-Passante : c'est l'intervalle de fréquence telle que $U_s \geq \frac{U_{s,max}}{\sqrt{2}} = \frac{4,8}{\sqrt{2}} \approx 3,0V$

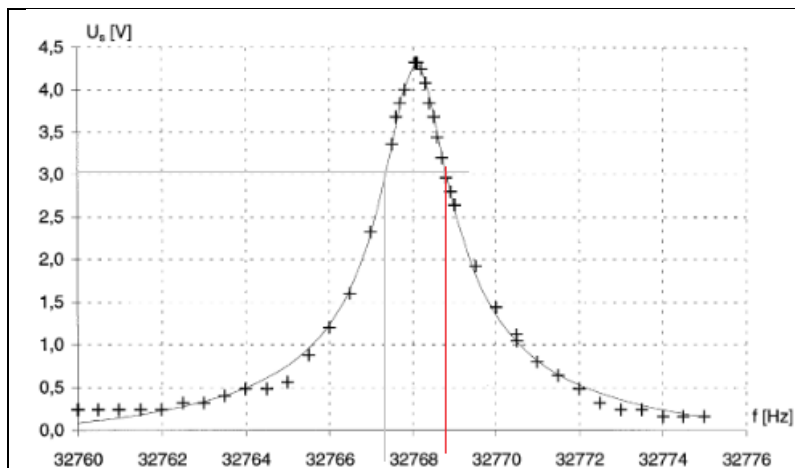


Figure 10 : Courbe de résonance d'un quartz.

On trouve $f_1 = 32767,3$ Hz et
 $f_2 = 32768,8$ Hz soit
 $\Delta f = f_2 - f_1 = 1,5$ Hz

Soit Q : le facteur de qualité (caractérise l'acuité de la résonance).

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{32768}{1,5} \approx 22000$$

ce qui est facteur de qualité très grand et montre donc une résonance très fine, qui permettra donc de mesurer des temps avec précision.

Rq : Facteur de qualité pour le diapason de l'ordre de 1000 pour le La 440 avec un pic de résonance fin.

Conclusion :

Annexe :